Aufgabe 18.124

Bestimmen Sie den Punkt der Ebene $2x-y=1$, der dem Koordinatenursprung am nächsten liegt, durch Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung!

Lösung:

Zu minimieren ist der Abstand $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ vom Koordinatenursprung. Äquivalent und einfacher ist die Minimierung des Quadrates des Abstands: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \longrightarrow \min$
NB: $g(x,y,z)=2x-y-1=0$

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(2x-y-1) \longrightarrow \min$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2\lambda=0 \qquad \longrightarrow 2x+4y=0,\ x=-2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y-\lambda=0 \qquad \longrightarrow \lambda=2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z=0 \qquad \longrightarrow z=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}=2x-y-1=0 \qquad \longrightarrow -4y-y-1=0,\ y=-\frac{1}{5},\ x=\frac{2}{5}$$

Das gesuchte Minimum kann also nur im Punkt $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5},0\right)$ liegen. Da der Abstand nicht kleiner als 0 werden kann, muss es ein Minimum geben. Also liegt es in dem einzigen dafür infrage kommenden Punkt.