Aufgabe 18.122

Bestimmen Sie den Punkt der Gerade $-7x+y=5$, der dem Punkt $(1,2)$ am nächsten liegt!

a) mit Mitteln der Analytischen Geometrie **und**
b) durch Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen!

Lösung:

a) Gleichung des Lots: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt des Lotes mit der Gerade:

$-7(1-7t)+(2+t)=5,\ \ -7+49t+2+t=5,\ \ -5+50t=5,\ \ 50t=10,\ \ t=\frac{1}{5}$

Lotfußpunkt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$

Also liegt der Punkt $(x,y)=\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right)$ der Gerade $-7x+y=5$ dem Punkt $(1,2)$ am nächsten.

b) $f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2 \longrightarrow \min$ unter der Nebenbedingung $-7x+y=5$

Lagrangemethode

$L(x,y,\lambda)=(x-1)^2+(y-2)^2+\lambda(-7x+y-5)$

$$\begin{aligned}
L_x &= 2(x-1)-7\lambda=0 &&\Longrightarrow\ 7\lambda = 2(x-1)\\
L_y &= 2(y-2)+\lambda=0 &&\Longrightarrow\ \lambda=-2(y-2)\\
L_\lambda &= -7x+y-5=0
\end{aligned}$$

$7\lambda=2(x-1)=-14(y-2),\ \ x-1=-7y+14,\ \ x+7y-15=0$

$$\begin{array}{rl}
x+7y-15=0 & \mid\cdot 7\\
-7x+y-5=0 & \mid +\\
7x+49y-105=0 & \mid +\\
50y-110=0 & \qquad y=\frac{11}{5},\ x=15-\frac{77}{5}=-\frac{2}{5}
\end{array}$$

Da der Abstand nach unten beschränkt ist, muss es ein Minimum geben. Da es nur einen einzigen stationären Punkt gibt, liegt dort das Minimum. Also liegt der Punkt $(x,y)=\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right)$ der Gerade $-7x+y=5$ dem Punkt $(1,2)$ am nächsten.

oder Einsetzmethode

NB: $y=7x+5,\ \ \tilde{f}(x)=f(x,7x+5)=(x-1)^2+(7x+5-2)^2=(x-1)^2+(7x+3)^2,$

$\tilde{f}'(x)=2(x-1)+14(7x+3)=100x+40=0,\ \ x=-\frac{2}{5},\ \ y=-\frac{14}{5}+5=\frac{11}{5}$

$\tilde{f}''(x)=100>0$, also liegt in dem einzigen stationären Punkt ein Minimum vor. Somit liegt der ermittelte Punkt $(x,y)=\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right)$ der Gerade $-7x+y=5$ dem Punkt $(1,2)$ am nächsten.