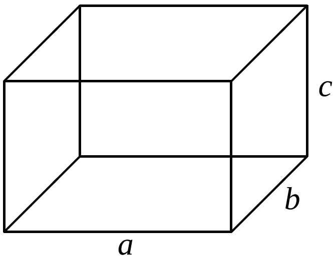
Aufgabe 18.121

Mit minimalem Materialaufwand soll ein quaderförmiger oben offener Behälter mit einem Fassungsvermögen von 1 Liter hergestellt werden. Ermitteln Sie die Seitenlängen des Quaders!

Lösung:



$A = ab + 2ac + 2bc \longrightarrow \min$
NB: $V = abc = 1$

$$\begin{aligned} L(a,b,c,\lambda) &= ab + 2ac + 2bc + \lambda(abc - 1)\\ L_a &= b + 2c + \lambda bc = 0\\ L_b &= a + 2c + \lambda ac = 0\\ L_c &= 2a + 2b + \lambda ab = 0\\ L_\lambda &= abc - 1 = 0 \end{aligned}$$

Wegen $abc = 1$ ist $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Aus $L_a = 0$ folgt $\lambda = -\dfrac{b+2c}{bc}$,

Einsetzen in $L_b = 0$ ergibt $a + 2c - \dfrac{b+2c}{bc}ac = a + 2c - a - 2\dfrac{ac}{b} = 0 \;\Rightarrow\; 2c = 2\dfrac{a}{b}c \;\Rightarrow\; a = b$,

Einsetzen in $L_c = 0$ ergibt $2a + 2b - \dfrac{b+2c}{bc}ab = 2a + 2b - \dfrac{ab}{c} - 2a = 0 \;\Rightarrow\; 2b = \dfrac{a}{c}b \;\Rightarrow\; a = 2c$,

also $a = b = 2c,\ abc = 4c^3 = 1 \implies c = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}},\ a = b = 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$.

Es gibt nur einen extremwertverdächtigen Punkt. Da A nach unten beschränkt ist, muss es ein Minimum geben, deshalb liegt dort das Minimum vor.

Die Seitenlängen des Quaders sind daher $c = \sqrt[3]{\dfrac{1\,\mathrm{l}}{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}\mathrm{dm}^3} \approx 0.63\,\mathrm{dm} = \underline{\underline{6.3\,\mathrm{cm}}}$,
$a = b = 2c \approx \underline{\underline{12.6\,\mathrm{cm}}}$.