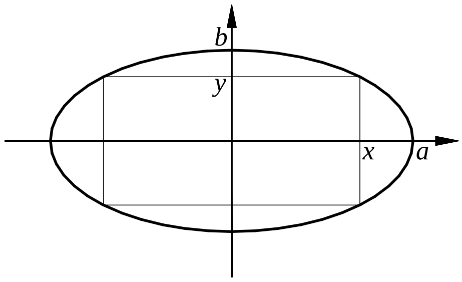
Aufgabe 18.120

Einer Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ soll ein Rechteck einbeschrieben werden. Welchen Flächeninhalt kann es maximal haben?

Lösung:



Die vier auf der Ellipse liegenden Eckpunkte des Rechtecks seien (x,y), $(-x,y)$, $(-x,-y)$ und $(x,-y)$. Der Einfachheit halber kann man sich darauf festlegen, dass (x,y) im I. Quadranten liegt, d.h. $x,y>0$ gilt. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist $4xy$. Gesucht ist also das Maximum von $4xy$ unter der Nebenbedingung $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

$$L(x,y,\lambda)=4xy+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

$$L_x=4y+\frac{2\lambda x}{a^2}=0 \qquad \lambda=-\frac{2ya^2}{x}$$

$$L_y=4x+\frac{2\lambda y}{b^2}=0 \qquad \lambda=-\frac{2xb^2}{y} \qquad -\lambda=\frac{2ya^2}{x}=\frac{2xb^2}{y},\ \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}$$

$$L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad 2\frac{x^2}{a^2}-1=0,\ x^2=\frac{a^2}{2}$$

Mit $x>0$ folgt $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ und daraus $y^2=\dfrac{b^2x^2}{a^2}=\dfrac{b^2\,\frac{a^2}{2}}{a^2}=\dfrac{b^2}{2}$ und mit $y>0$ schließlich $y=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Da der Flächeninhalt des Rechtecks nicht größer als der der Ellipse werden kann, ist er nach oben beschränkt ist. Deshalb muss es ein Maximum geben. Da es nur einen extremwertverdächtigen Punkt gibt, wird in diesem das Maximum angenommen.

Maximaler Flächeninhalt ist also $4xy=4\,\dfrac{a}{\sqrt{2}}\,\dfrac{b}{\sqrt{2}}=2ab$.