## Aufgabe 18.119

Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y,z)=xyz$ unter den Nebenbedingungen $x+y+z=5$ und $xy+xz+yz=8$ !

**Lösung:**

Nebenbedingungen: $g_1(x,y,z)=x+y+z-5=0$ (Ebene)
$g_2(x,y,z)=xy+xz+yz-8=0$ (elliptisches Hyperboloid)

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+\mu g_2(x,y,z)=xyz+\lambda(x+y+z-5)+\mu(xy+xz+yz-8)$$

$$\begin{aligned} F_x &= yz+\lambda+\mu(y+z)=0 \\ F_y &= xz+\lambda+\mu(x+z)=0 \\ F_z &= xy+\lambda+\mu(x+y)=0 \\ F_\lambda &= x+y+z-5=0 \\ F_\mu &= xy+xz+yz-8=0 \end{aligned}$$

$$\underbrace{yz+\mu(y+z)=xz+\mu(x+z)}=xy+\mu(x+y)$$

$$\begin{array}{llll} \Longrightarrow & (y-x)z=\mu(x-y) & \Longrightarrow & x=y \text{ oder } z=-\mu, \\ \text{analog} & (z-x)y=\mu(x-z) & \Longrightarrow & x=z \text{ oder } y=-\mu, \\ & (z-y)x=\mu(y-z) & \Longrightarrow & y=y \text{ oder } x=-\mu \end{array}$$

Wäre $x=y=z$, so würde aus $x+y+z=5$ folgen, dass $x=y=z=\frac{5}{3}$ und damit $xy+xz+yz=\frac{75}{9}\neq 8$ gilt, es könnten also nicht beide Nebenbedingungen erfüllt sein.

Also gibt es folgende Möglichkeiten für die Lösung: $x=y=-\mu$ oder $y=z=-\mu$ oder $x=z=-\mu$.

Wir betrachten $x=y=-\mu$: $F_\lambda=2x+z-5=0,\ z=5-2x,$
$F_\mu=x^2+2xz-8=x^2+2x(5-2x)-8=-3x^2+10x-8=0,$

$$x^2-\frac{10}{3}x+\frac{8}{3}=0,\quad x_{1/2}=\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{24}{9}}=2;\ \frac{4}{3}$$

$x=y=2 \quad\Longrightarrow\quad z=1,\ \mu=-2,\ \lambda=4,$

$x=y=\frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad z=\frac{7}{3},\ \mu=-\frac{4}{3},\ \lambda=\frac{16}{9}$

Analog ergeben sich die weiteren Lösungen durch Tausch der Variablen, d.h. stationäre Punkte sind $(x,y,z)=(2,2,1)$, $(2,1,2)$ und $(1,2,2)$ mit $f(x,y,z)=4$

sowie $f(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$ und $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ mit $f(x,y,z)=\frac{112}{27}$.

Die Ebene und das elliptische Hyperboloid schneiden sich in einer endlichen Kurve, ihre Projektion in die $x$-$y$-Ebene ist $xy+(x+y)z=xy+(x+y)(5-(x+y))=-x^2-xy-y^2+5x+5y=8$. Da die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit ist (beide Hauptminoren positiv), ist das eine Ellipse.

Über der endlichen geschlossenen Kurve muss $f(x,y,z)$ Maximum und Minimum haben, also ist $\frac{112}{27}$ das Maximum und 4 das Minimum, beide werden jeweils dreimal angenommen.