Aufgabe 18.118

Das Produktionsergebnis P hänge von den Personalkosten x und den Sachkosten y nach der Formel $P(x,y)=6x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$ ab.

a) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen, welcher Wertebereich ergibt sich dafür?

b) x und y werden in Geldeinheiten gemessen, es sollen insgesamt genau 100 Geldeinheiten verwendet werden. Wie sind diese auf x und y aufzuteilen, um ein maximales Produktionsergebnis zu erzielen?

c) Für das konstante Produktionsniveau $P(x,y)=48$ soll der Zusammenhang zwischen Personal- und Sachkosten durch die Funktion $y=\varphi(x)$ beschrieben werden. Bestimmen Sie $\varphi(1)$ und durch implizite Differenziation $\varphi'(1)$!

d) Bestimmen Sie aus $\varphi(1)$ und $\varphi'(1)$ einen Näherungswert für $\varphi(1.01)$ und vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert!

Lösung:

a) Offensichtlich sind alle nichtnegativen Argumente sinnvoll, so dass als Definitionsbereich $\mathrm{DB}(P)=\{(x,y):x\geq 0,y\geq 0\}$ zu wählen ist. Dafür ergibt sich $\mathrm{WB}(P)=\{P:P\geq 0\}$.

b) $P(x,y)=6x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}\longrightarrow \max$ unter der Nebenbedingung $x+y=100$

$y=100-x,\ \widetilde{P}(x)=6x^{\frac{2}{5}}(100-x)^{\frac{3}{5}}\longrightarrow\max$

$$\widetilde{P}'(x)=\frac{12}{5}x^{-\frac{3}{5}}(100-x)^{\frac{3}{5}}-\frac{18}{5}x^{\frac{2}{5}}(100-x)^{-\frac{2}{5}}=0$$

$$\Longrightarrow\ 2x^{-\frac{3}{5}}(100-x)^{\frac{3}{5}}=3x^{\frac{2}{5}}(100-x)^{-\frac{2}{5}},\ 2(100-x)=3x,\ 200=5x,\quad x=40,\ y=60$$

Da das Produktionsergebnis wegen der begrenzten Ressourcen nicht unendlich groß werden kann, muss es ein Maximum geben. Da es nur einen extremwertverdächtigen Punkt gibt, muss dort das Maximum liegen. Also sind 40 Geldeinheiten für Personal- und 60 Geldeinheiten für Sachkosten zu verwenden.

c) $P(1,y)=6y^{\frac{3}{5}}=48,\ y^{\frac{3}{5}}=8,\ y=8^{\frac{5}{3}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^5=32$, also $\varphi(1)=32$.

$$\varphi'(x)=-\frac{\partial P/\partial x}{\partial P/\partial y}=-\frac{\frac{12}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}}{\frac{18}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}}=-\frac{2y}{3x},\quad \varphi'(1)=-\frac{2\cdot 32}{3\cdot 1}=-\frac{64}{3}$$

d) $\varphi(1.01)\approx\varphi(1)+0.01\varphi'(1)=32-\dfrac{64}{3}0.01=31.786667$

$$P(1.01,y)=6\cdot 1.01^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}=48,\quad y^{\frac{3}{5}}=\frac{8}{1.01^{\frac{2}{5}}},\quad y=\varphi(1.01)=\left(\frac{8}{1.01^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{5}{3}}\approx 31.788428$$