Aufgabe 18.117

Die Funktion $f(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ beschreibe für ein öffentlich gefördertes Projekt zum Gemüseanbau den Ertrag pro Hektar (in Mengeneinheiten) in Abhängigkeit von den eingesetzten Aufwendungen x für Bewässerung und y für Dünger (beide gemessen in Geldeinheiten). Es stehen insgesamt C Geldeinheiten an Fördermitteln zur Verfügung, die unbedingt vollständig verbraucht werden sollen.

In welchem Verhältnis sind die Fördermittel aufzuteilen, um einen maximalen Ertrag zu sichern? Lösen Sie die Aufgabe a) mit der Einsetzmethode,
b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Lösung:

$z=f(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \max, \qquad \text{NB: } x+y=C$

a) $y=C-x, \quad \tilde{z}(x)=f(x,C-x)=2x^{\frac{1}{3}}(x,C-x)^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \max$

$$\tilde{z}'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(C-x)^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}(C-x)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\,\frac{C-x-2x}{x^{\frac{2}{3}}(C-x)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}\,\frac{C-3x}{x^{\frac{2}{3}}(C-x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\tilde{z}'(x)=\begin{cases} >0, & x<C/3 \quad \text{monoton wachsend} \\ =0, & x=C/3 \\ <0, & x>C/3 \quad \text{monoton fallend} \end{cases} \longrightarrow \text{Max.}$$

Maximum also bei $x=\frac{C}{3},\ y=C-x=\frac{2C}{3}$, Aufteilung im Verhältnis $1:2$.

b) NB in der Form $g(x,y)=0$, d.h. $g(x,y)=x+y-C$.

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\lambda(x+y-C)$$

$$F_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+\lambda=0$$

$$F_y=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+\lambda=0$$

$$F_y=x+y-C \quad =0 \quad y=C-x \qquad \text{Elimination von } y$$

$$-\lambda=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(C-x)^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}(C-x)^{-\frac{1}{3}} \quad \text{Elimination von } \lambda$$

$$\Longrightarrow \quad x=\frac{C}{3},\ y=C-x=\frac{2C}{3} \quad \text{wie oben}$$

Hier ist durch die vorherige Rechnung mit der Einsetzmethode bereits bekannt, dass es sich um ein Maximum handelt. Wird nur mit der Lagrangemethode gerechnet, so müsste als hinreichende Bedingung die Definitheit der Hessematrix über der Nebenbedingung untersucht werden. Das wird hier nicht behandelt.

Für die konkrete Aufgabe ist aber auch folgende Argumentation möglich:

Es gibt nur einen stationären Punkt. Da mit begrenzten Fördermitteln der Ertrag nicht beliebig groß werden kann, muss es ein Maximum geben. Da es nur einen einzigen extremwertverdächtigen Punkt gibt, muss dort das Maximum liegen.

Eine derartige Argumentation ist bei Anwendungsaufgaben häufig möglich.