

Aufgabe 18.116

Ein Unternehmen stellt vier Produkte her, die zu Preisen p_1, p_2, p_3 bzw. p_4 verkauft werden. Der tägliche Absatz beträgt in Abhängigkeit von den jeweiligen Preisen $a_1 = 1000 - 20p_1$, $a_2 = 1500 - 10p_2$, $a_3 = 1000 - 10p_3$ bzw. $a_4 = 2000 - 10p_4$. Aus Kapazitätsgründen muss die tägliche Produktion der Gleichung $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 = 7800$ genügen. Berechnen Sie die Preise, unter denen der tägliche Umsatz unter den beschriebenen Bedingungen maximal ist, sowie den damit zu erreichenden Umsatz!

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Umsatz } U(p_1, p_2, p_3, p_4) &= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 \\ &= 1000p_1 - 20p_1^2 + 1500p_2 - 10p_2^2 + 1000p_3 - 10p_3^2 + 2000p_4 - 10p_4^2 \end{aligned}$$

Nebenbedingung

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 &= 1000 - 20p_1 + 3000 - 20p_2 + 2000 - 20p_3 + 4000 - 20p_4 = 7800, \\ \text{d.h. } 2200 - 20p_1 - 20p_2 - 20p_3 - 20p_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2, p_3, p_4, \lambda) &= 1000p_1 - 20p_1^2 + 1500p_2 - 10p_2^2 + 1000p_3 - 10p_3^2 + 2000p_4 - 10p_4^2 \\ &\quad + \lambda(2200 - 20p_1 - 20p_2 - 20p_3 - 20p_4) \end{aligned}$$

$$F_{p_1} = 1000 - 40p_1 - 20\lambda = 0 \quad p_1 = \frac{1000 - 20\lambda}{40} = 25 - \frac{1}{2}\lambda$$

$$F_{p_2} = 1500 - 20p_2 - 20\lambda = 0 \quad p_2 = \frac{1500 - 20\lambda}{20} = 75 - \lambda$$

$$F_{p_3} = 1000 - 20p_3 - 20\lambda = 0 \quad p_3 = \frac{1000 - 20\lambda}{20} = 50 - \lambda$$

$$F_{p_4} = 2000 - 20p_4 - 20\lambda = 0 \quad p_4 = \frac{2000 - 20\lambda}{20} = 100 - \lambda$$

$$F_{\lambda} = 2200 - 20p_1 - 20p_2 - 20p_3 - 20p_4 = 0 \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 110$$

$$25 - \frac{\lambda}{2} + 75 - \lambda + 50 - \lambda + 100 - \lambda = 110, \quad \frac{7}{2}\lambda = 140, \quad \lambda = 40$$

$$\implies p_1 = 5 \longrightarrow a_1 = 900$$

$$p_2 = 35 \longrightarrow a_2 = 1150$$

$$p_3 = 10 \longrightarrow a_3 = 900$$

$$p_4 = 60 \longrightarrow a_4 = 1400$$

$$\text{max. Umsatz } \underline{\underline{137750 \text{ Geldeinheiten}}}$$

Auf Grund der Kapazitätsbeschränkung ist der Umsatz beschränkt, es muss ein Maximum geben. Da es nur einen extremwertverdächtigen Punkt gibt, muss dort das Maximum liegen.