Aufgabe 18.114

Ein Unternehmen stellt ein Erzeugnis in zwei verschiedenen Produktionsstätten P_1 und P_2 her. In der Produktionsstätte P_1 entstehen für die Produktion von x Stück des Erzeugnisses Kosten in Höhe von $K_1(x)=\frac{x^2}{3}+100\,000$, während in der Produktionsstätte P_2 Kosten in Höhe von $K_2(x)=x^2+8x+30\,000$ entstehen. Es sollen 300 Stück des Erzeugnisses kostenminimal produziert werden.

a) Wie ist die Produktion auf beide Produktionsstätten zu verteilen, wenn aus Kapazitätsgründen keine der Produktionsstätten den Auftrag allein fertigen kann?
b) Welche Kosten entstehen bei dieser Verteilung?
c) Wie ist zu verfahren, wenn die Produktionsstätten den Auftrag auch allein fertigen können und die Möglichkeit besteht, auf eine der Produktionsstätten zu verzichten?

Lösung:

a) $K(x,y) = \frac{x^2}{3}+y^2+8y+130\,000 \longrightarrow \min$

Nebenbedingung: $x+y=300$

Lagrangemethode:

$$F(x,y,\lambda)=\frac{x^2}{3}+y^2+8y+130\,000+\lambda(x+y-300)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2}{3}x+\lambda \quad =0 && x=-\frac{3}{2}\lambda\\
&\frac{\partial F}{\partial y}=2y+8+\lambda \ =0 && y=-\frac{\lambda+8}{2}\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y-300=0 && -\frac{3}{2}\lambda-\frac{\lambda+8}{2}=-2\lambda-4=300,\ -2\lambda=304,\\
& && \lambda=-152,\ x=228,\ y=72
\end{aligned}$$

Die Kosten können nicht kleiner als 0 werden, also muss es ein Minimum geben. Da es nur einen stationären Punkt gibt, muss das Minimum in diesem angenommen werden.

oder Einsetzmethode:

Wegen der Nebenbedingung ist $x=300-y$.

$$\widetilde{K}(y)=K(300-y,y)=\frac{(300-y)^2}{3}+y^2+8y+130\,000$$

$$\widetilde{K}'(y)=-\frac{2}{3}(300-y)+2y+8=-200+\frac{2}{3}y+2y+8=\frac{8}{3}y-192=0,\quad y=\frac{3}{8}192=72,\quad x=228$$

$$\widetilde{K}''(y)=\frac{8}{3}>0 \quad\Longrightarrow\quad \text{in der extremwertverdächtigen Stelle } y=72 \text{ liegt Minimum}$$

Also sind die Kosten minimal, wenn 228 Stück in der Produktionsstätte P_1 und 72 Stück in der Produktionsstätte P_2 gefertigt werden.

b) $K(228,72)=153\,088$

c) $K_1(300)=\frac{300^2}{3}+100\,000=130\,000,\qquad K_2=300^2+8\cdot300+30\,000=122\,400$

Der ganze Auftrag wäre in der Produktionsstätte P_2 zu fertigen.