**Aufgabe 18.113**

Eine Ware kann nach zwei verschiedenen Technologien gefertigt werden. Bei der Produktion von $x$ Einheiten nach Technologie A entstehen Kosten in Höhe von $50+11x+\frac{x^2}{10}$, während nach Technologie B Kosten in Höhe von $x^2+x$ entstehen. Insgesamt sollen 60 Einheiten kostenminimal produziert werden. Wie oft sind dafür die beiden Technologien anzuwenden?

**Lösung:**

$$K(x,y) = 50+11x+\frac{x^2}{10}+y^2+y \longrightarrow \text{min}$$

Nebenbedingung: $x+y=60$

**Lagrangemethode:**

$$F(x,y,\lambda)=50+11x+\frac{x^2}{10}+y^2+y+\lambda(x+y-60)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=11+\frac{x}{5}+\lambda=0 \qquad x=-5(11+\lambda)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+1+\lambda=0 \qquad y=-\frac{\lambda+1}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y-60=0 \qquad -5(11+\lambda)-\frac{\lambda+1}{2}=60,\ -110-10\lambda-\lambda-1=120,\ -11\lambda=231,$$
$$\lambda=-21,\ x=50,\ y=10$$

Die Kosten können nicht kleiner als 0 werden, also muss es ein Minimum geben. Da es nur einen stationären Punkt gibt, muss das Minimum in diesem angenommen werden. Also sind die Kosten minimal, wenn die Technologie A 50 mal und die Technologie B 10 mal angewendet wird.

**oder Einsetzmethode:**

Wegen der Nebenbedingung ist $y=60-x$.

$$\widetilde{K}(x)=K(x,60-x)=50+11x+\frac{x^2}{10}+(60-x)^2+(60-x)$$

$$\widetilde{K}'(x)=11+\frac{x}{5}-2(60-x)-1=11+\frac{x}{5}-120+2x-1=\frac{11}{5}x-110=0, \quad x=\frac{5}{11}110=50,\ y=10$$

$$\widetilde{K}''(x)=\frac{11}{5}>0 \quad\Longrightarrow\quad \text{in der extremwertverdächtigen Stelle } x=50 \text{ liegt Minimum}$$

Also sind die Kosten minimal, wenn die Technologie A 50 mal und die Technologie B 10 mal angewendet wird.