## Aufgabe 18.112

Ein Unternehmen stellt ein Erzeugnis in zwei Produktionsstätten $P_1$ und $P_2$ her, wobei jeweils fixe Kosten in Höhe von $c_0 = 500$ sowie variable Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl in Höhe von $c_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2$ in $P_1$ und in Höhe von $c_2(x) = x_2^2 + 2x_2$ in $P_2$ anfallen. Es sollen 80 Stück des Erzeugnisses kostenminimal produziert werden. Ermitteln Sie, wie die Produktion auf die beiden Produktionsstätten zu verteilen ist,

a) mit der Einsetzmethode,
b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

**Lösung:**

$$K(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1000 \longrightarrow \min$$

NB: $x_1 + x_2 = 80$

a) $x_2 = 80 - x_1$,

$$\tilde{K}(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 + 6400 - 160x_1 + x_1^2 + 160 - 2x_1 + 1000 = \frac{3}{2}x_1^2 - 162x_1 + 7560 \longrightarrow \min,$$

$$\tilde{K}'(x_1) = 3x_1 - 162 = 0 \quad \text{für} \quad x_1 = 54,$$

$$\tilde{K}''(x_1) = 3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Minimum bei } x_1 = 54,\ x_2 = 26$$

b) $F(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1000 + \lambda(x_1 + x_2 - 80)$

$$\begin{aligned}
F_{x_1} &= x_1 + \lambda = 0 & x_1 &= -\lambda \\
F_{x_2} &= 2x_2 + 2 + \lambda = 0 & x_2 &= -\frac{\lambda+2}{2} \\
F_{\lambda} &= x_1 + x_2 - 80 = 0 & -\lambda - \frac{\lambda+2}{2} - 80 &= 0
\end{aligned}$$

$3\lambda + 162 = 0,\ \lambda = -54 \Rightarrow x_1 = 54,\ x_2 = 26$

$K$ ist nach unten beschränkt, daher muss es ein Minimum geben. Da nur ein stationärer Punkt existiert, liegt dort das Minimum.

Es sind 54 Stück in der Produktionsstätte $P_1$ und 26 Stück in der Produktionsstätte $P_2$ herzustellen.