Aufgabe 18.110

Ermitteln Sie die Extrema von $f(x,y,z)=x+y+z$ längs der Ellipse, in der sich die Ebene $x+z=1$ und der Zylinder $x^2+y^2=4$ schneiden!

Lösung:

$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x+y+z+\lambda(x+z-1)+\mu(x^2+y^2-4)$

(I)	$F_x=1+\lambda+2\mu x$	$=0$
(II)	$F_y=1+2\mu y$	$=0$
(III)	$F_z=1+\lambda$	$=0$
(IV)	$F_\lambda=x+z-1$	$=0$
(V)	$F_\mu=x^2+y^2-4$	$=0$

(III) $\Rightarrow\ \lambda=-1$, (I) $\Rightarrow\ 2\mu x=0$, $\mu=0$ ist wegen (II) nicht möglich $\Rightarrow\ x=0$,
(IV) $\Rightarrow\ z=1$, (V) $\Rightarrow\ y=\pm 2$, (II) $\Rightarrow\ \mu=-\dfrac{1}{2y}=\mp\dfrac{1}{4}$

Stationäre Punkte $(x,y,z,\lambda,\mu)=\left(0,2,1,-1,-\dfrac{1}{4}\right)$ und $\left(0,-2,1,-1,\dfrac{1}{4}\right)$

$f(0,2,1)=3,\ \ f(0,-2,-1)=-1$

Längs der geschlossenen Kurve muss es mindestens ein Maximum und ein Minimum von $f(x,y,z)$ geben. Da es nur 2 stationäre Punkte gibt, wird in diesen das Extremum angenommen:

Maximum $f(0,2,1)=3$, Minimum $f(0,-2,1)=-1$