Aufgabe 18.109

Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2$ über der Schnittgeraden der Ebenen $x+3y=30$ und $y+2z=20$

a) mit der Lagrangemethode,
b) durch Ermittlung der Geradengleichung und Einsetzen!

Lösung:

a) $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+3y^2+2z^2+\lambda(x+3y-30)+\mu(y+2z-20)$

$$\begin{array}{llll}
F_x=2x+\lambda & =0 & \Longrightarrow & \lambda=-2x \\
F_y=6y+3\lambda+\mu & =0 & \Longrightarrow & \mu=-6y-3\lambda=6x-6y \\
F_z=4z+2\mu & =0 & \Longrightarrow & z=-\frac{\mu}{2}=-3x+3y \\
F_\lambda=x+3y-30 & =0 & \Longrightarrow & x+\ \ 3y=\ \ 30 \\
F_\mu=y+2z-20 & =0 & \Longrightarrow & -6x+18y=\ \ 20 \\
 & & & 6x+18y=180 \\
 & & & 25y=200,\ \ y=8,\ x=6,\ z=6
\end{array}$$

$(6,8,6)$ ist der einzige stationäre Punkt. Da $f(x,y,z)$ nach unten beschränkt ist, muss es ein Minimum geben. Also liegt $x=6, y=8, z=6$ das Minimum $f(6,8,6)=300$.

b) $x=30-3y,\ z=10-\dfrac{y}{2}$,

$$\tilde{f}(y)=(30-3y)^2+3y^2+2\left(10-\frac{y}{2}\right)^2=900-180y+9y^2+3y^2+200-20y+\frac{y^2}{2}$$
$$=\frac{25}{2}y^2-200y+1100,$$

$\tilde{f}'(y)=25y-200=0 \Longrightarrow y=8,\ \tilde{f}''(y)=25>0 \Longrightarrow$ Minimum $\tilde{f}(8)=300$ bei $y=8, x=6, z=6$