Aufgabe 18.108

Ermitteln Sie alle Extrema der Funktion $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ über dem Ellipsoid $x^2+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}=1$!

Lösung:

$$F(x,y,\lambda)=x^2y^2z^2+\lambda(x^2+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}-1)$$

$$\begin{aligned}
F_x &= 2xy^2z^2+2\lambda x &= 0 \quad &\iff \quad & x(y^2z^2+\lambda) &= 0\\
F_y &= 2x^2yz^2+\frac{2}{4}\lambda y &= 0 \quad &\iff \quad & y\left(x^2z^2+\frac{\lambda}{4}\right) &= 0\\
F_z &= 2x^2y^2z+\frac{2}{9}\lambda z &= 0 \quad &\iff \quad & z\left(x^2y^2+\frac{\lambda}{9}\right) &= 0\\
F_\lambda &= x^2+\frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{3^2}-1 = 0
\end{aligned}$$

Ist $x=0$, $y=0$ oder $z=0$ (d.h. auf den Schnittellipsen mit den Koordinatenebenen), so wird in jedem Falle das Minimum $f(x,y,z)=0$ angenommen, da offensichtlich überall $f(x,y,z)\geq 0$ gilt.

Sei nun $x\neq 0$, $y\neq 0$ und $z\neq 0$, dann folgt $-\lambda=y^2z^2=4x^2z^2=9x^2y^2$ und daraus $y^2=4x^2$ und $z^2=9x^2$. Einsetzen in $F_\lambda=0$ ergibt $3x^2=1$ und damit $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, $z=\pm\frac{3}{\sqrt{3}}=\pm\sqrt{3}$ (Vorzeichen unabhängig voneinander).

Für die 8 Punkte $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$ gilt $f(x,y,z)=\frac{1}{3}\frac{4}{3}\frac{9}{3}=\frac{4}{3}$. Da die Funktion $f(x,y,z)$ über der endlichen Fläche ein Maximum haben muss, wird dieses in allen 8 Punkten angenommen.

Also: Minimum 0 in den 3 Schnittellipsen mit den Koordinatenebenen,
Maximum $\frac{4}{3}$ in den 8 Punkten $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$ (je 1 Maximum pro Oktant).