Aufgabe 18.107

Ermitteln Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^3 - 3\sqrt{2}y$ über dem Teil der Hyperbel $x^2-y^2=1$, für den $x\geq 1$ gilt!

Lösung:

$F(x,y,\lambda)=x^3-3\sqrt{2}y-\lambda(x^2-y^2-1)$

$F_x = 3x^2+2\lambda x \quad = 0 \implies x(3x+2\lambda)=0 \implies$ (wegen $x\geq 1$) $3x=-2\lambda$

$F_y = -3\sqrt{2}-2\lambda y = 0 \implies \qquad -3\sqrt{2}+3xy=0,\ xy=\sqrt{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$

$F_\lambda = x^2-y^2-1 \quad = 0 \implies \qquad x^2-\dfrac{2}{x^2}-1=0,\ x^4-x^2-1=0$

$$x_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}=\begin{cases} 2 \implies \text{(wegen } x\geq 1\text{)}\ \ x=\sqrt{2},\ \ y=\frac{\sqrt{2}}{x}=1 \\ -1\ \ \text{nicht möglich}\end{cases}$$

Ein Extremwert kann also nur im Punkt $(x,y)=(\sqrt{2},1)$ vorliegen. Für $x\to\infty$ gilt auf der betrachteten Hyperbel $|x|\approx|y|$, so dass auf dem Hyperbelzweig mit $x\geq 1$ die Funktion $f(x,y)=x^3-3\sqrt{2}y$ für $x\to\infty$ sowohl bei $y>0$ als auch bei $y<0$ gegen $+\infty$ strebt. Somit ist $f(x,y)$ über diesem Zweig nach unten beschränkt, es muss ein Minimum geben. Da es nur einen stationären Punkt gibt, liegt dort das Minimum.

Somit ist $f(\sqrt{2},1)=-\sqrt{2}$ globales Minimum und einziger Extremwert von $f(x,y)$ über dem Hyperbelzweig.