

Aufgabe 18.105

Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y) = xy$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 2$!

Lösung:

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2),$$

$$F_x = y + 2\lambda x = 0 \Rightarrow y = -2\lambda x,$$

$$F_y = x + 2\lambda y = 0 \Rightarrow x = -2\lambda y = 4\lambda^2 x \Rightarrow x = y = 0 \text{ oder } \lambda = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm x,$$

$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \text{ scheidet aus,}$$

aus $y = \pm x$ folgt $2x^2 = 2, x = \pm 1, y = \pm 1$ (Vorzeichen unabhängig voneinander).

Da $f(x, y) = xy$ über dem Kreis $x^2 + y^2 = 2$ beschränkt ist, muss es ein Maximum und ein Minimum geben, die Extrema können nur in den Punkten $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ angenommen werden. Also ist das Maximum 1 und wird bei $(x, y) = (1, 1)$ und $(-1, -1)$ angenommen, das Minimum ist -1 und wird bei $(x, y) = (1, -1)$ und $(-1, 1)$ angenommen.