Aufgabe 18.103

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y)=x^2-6xy+y^2+6\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y$ unter der Nebenbedingung $y=x$

a) mit der Einsetzmethode,
b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

Wie hängt das Ergebnis mit den Ergebnissen der Aufgaben 17.17 und 18.86a) zusammen?

Lösung:

a) $\widetilde{f}(x)=f(x,x)=-4x^2+12\sqrt{2}x,\ \widetilde{f}'(x)=-8x+12\sqrt{2}=0 \implies x=\frac{3}{2}\sqrt{2},\ \widetilde{f}''(x)=-8<0$, also Maximum bei $x=y=\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\quad f(\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\sqrt{2})=18$.

b) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x-y)=x^2-6xy+y^2+6\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y+\lambda(x-y)$

$$\begin{array}{lll} F_x = 2x-6y+6\sqrt{2}+\lambda=0 & & -4x+6\sqrt{2}+\lambda=0 \\ F_y = -6x+2y+6\sqrt{2}-\lambda=0 & & -4x+6\sqrt{2}-\lambda=0 \quad \lambda=0,\ x=\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \\ F_z = x-y=0 & x=y & \end{array}$$

Einziger stationärer Punkt unter der Nebenbedingung $x=y$ ist also der Punkt $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ mit $f\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)=18$. Da für $x=y\to\pm\infty$ in beiden Fällen $f\to-\infty$ gilt, ist f unter der Nebenbedingung $x=y$ nach oben beschränkt, es muss also ein Maximum geben. Da dafür nur der einzige stationäre Punkt in Frage kommt, wird das Maximum dort angenommen.

Bei der Drehung aus Aufgabe 17.17 entspricht $x=y$ der η-Achse. Das Niveaulinienbild bei Aufgabe 18.86a) zeigt, dass das Maximum längs der η-Achse bei $\eta=3$ mit $f=18$ angeommen wird.
Aus $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ folgt $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ \frac{3}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$.