Aufgabe 18.102

Bestimmen Sie sofern existent den größten und den kleinsten Wert der Funktion $f(x,y)=10x^2+12xy+10y^2+8x+24y$ (vgl. Aufgabe 18.84) über der Geraden $11x+5y=23$

a) mit der Einsetzmethode,
b) mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators!

Lösung:

a) $y=\dfrac{23-11x}{5}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x) &= f(x,y(x)) = 10x^2+12x\frac{23-11x}{5}+10\frac{(23-11x)^2}{25}+8x+24\frac{23-11x}{5}\\ &= \frac{50x^2+276x-132x^2+1058-1012x+242x^2+40x+552-264x}{5}\\ &= \frac{160x^2-960x+1610}{5} = 32x^2-192x+322\end{aligned}$$

$\widetilde{f}'(x) = 64x-192=0 \implies x=3,$

$\widetilde{f}''(x)=64>0 \implies$ Minimum bei $x=3,\ y=\dfrac{23-11x}{5}=-2,\ f(3,-2)=34$

Über der Gerade ist die Funktion eine Parabel, deren kleinster Funktionswert 34 ist, während sie nach oben unbeschränkt ist.

b) $F(x,y,\lambda)=10x^2+12xy+10y^2+8x+24y+\lambda(11x+5y-23)$

$$\begin{array}{lrrrrll} F_x = & 20x+ & 12y+ & 8+ & 11\lambda & =0 & |\cdot 5\\ F_y = & 12x+ & 20y+ & 24+ & 5\lambda & =0 & |\cdot 11\\ F_\lambda = & 11x+ & 5y- & 23 & & =0 & \quad |+\\ & 100x+ & 60y+ & 40+ & 55\lambda & =0 & |-\\ & 132x+ & 220y+ & 264+ & 55\lambda & =0 & |+\\ & 32x+ & 160y+ & 224 & & =0 & |:32\\ & x+ & 5y+ & 7 & & =0 & \quad |-\\ & 10x & - & 30 & & =0, & x=3,\ y=\dfrac{-7-x}{5}=-2,\ \lambda=\dfrac{12x+20y+24}{-5}=-4 \end{array}$$

Aus Aufgabe 18.84 ist bekannt, dass $f(x,y)$ über $\mathbb{R}^2$ nach unten beschränkt ist. Damit ist $f(x,y)$ erst recht über der Gerade $11x+5y=23$ nach unten beschränkt. Folglich muss es ein Minimum geben. Da es nur einen extremwertverdächtigen Punkt gibt, liegt dort das Minimum, dieses ist $f(3,-2)=34$. Kleinster Funktionswert ist 34, nach oben ist $f(x,y)$ auch über der Gerade unbeschränkt.