Aufgabe 18.101

a) Untersuchen Sie, ob die Punkte $\left(3,-2,-\frac{1}{2}\right)$, $(3,-1,0)$, $\left(3,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ für die Funktion $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_3-3x_3$ unter den Nebenbedingungen $x_1+x_2-x_3=2$, $x_1-x_2+x_3=4$ stationär sind!

b) Geben Sie eine Schätzung ab, wie sich der optimale Funktionswert für die betrachtete Zielfunktion unter den beiden angegebenen Nebenbedingungen ändert, wenn die rechte Siete der zweiten Nebenbedingung von 4 auf 3,9 vermindert wird.

Hinweis: Mit dem Langrange-Multiplikator λ_i kann näherungsweise angegeben, wie sich der optimale Funk tionswert bei einer kleinen Änderung der Konstante C_i in der entsprechenden Nebenbedingung ändert: $\Delta f \approx -\lambda_i \Delta C_i$.

(nach Luderer, B.; Paape, C. u. Würker, U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik. 5. Aufl. Teubner 2008, Aufgabe A8.8, S. 221, 331)

Lösung:

a) $F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_3-3x_3+\lambda_1(x_1+x_2-x_3-2)+\lambda_2(x_1-x_2+x_3-4)$

$$\nabla F=\begin{pmatrix}F_{x_1}\\F_{x_2}\\F_{x_3}\\F_{\lambda_1}\\F_{\lambda_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1+2x_3+\lambda_1+\lambda_2\\2x_2+\lambda_1-\lambda_2\\2x_1-3-\lambda_1+\lambda_2\\x_1+x_2-x_3-2\\x_1-x_2+x_3-4\end{pmatrix}\qquad\begin{aligned}F_{x_1}&=4x_1+2x_3+\lambda_1+\lambda_2=0\\F_{x_2}&=2x_2+\lambda_1-\lambda_2=0\\F_{x_3}&=2x_1-3-\lambda_1+\lambda_2=0\\F_{\lambda_1}&=x_1+x_2-x_3-2=0\\F_{\lambda_2}&=x_1-x_2+x_3-4=0\end{aligned}$$

zu $x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=-\frac{1}{2}$:

$F_{\lambda_1}=3-2+\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}\neq 0 \implies$ Punkt nicht zulässig, erfüllt NB nicht!

zu $x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=0$:

$$\left.\begin{aligned}F_{\lambda_1}&=3-1-2=0\\F_{\lambda_2}&=3+1-4=0\end{aligned}\right\}\text{ Punkt zulässig.}$$

$$F_{x_1}=12+\lambda_1+\lambda_2=0$$
$$\left.\begin{aligned}F_{x_2}&=-2+\lambda_1-\lambda_2=0\quad|+\\F_{x_3}&=\ \ 3-\lambda_1+\lambda_2=0\quad|+\end{aligned}\right\}1=0,\text{ Widerspr.}\Rightarrow\text{Es gibt keine }\lambda_1,\lambda_2\text{, Punkt nicht stationär.}$$

zu $x_1=3,\ x_2=-\frac{3}{2},\ x_3=-\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}F_{\lambda_1}&=3-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-2=0\\F_{\lambda_2}&=3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-4=0\end{aligned}\right\}\text{ Punkt zulässig.}$$

$$\begin{aligned}F_{x_1}&=12-1+\lambda_1+\lambda_2=0 &\quad \lambda_1+\lambda_2&=-11\quad|+\\F_{x_2}&=\quad -3+\lambda_1-\lambda_2=0 &\quad \lambda_1-\lambda_2&=\quad 3\quad|+\\F_{x_3}&=\ 6-3-\lambda_1+\lambda_2=0 &\quad \lambda_1-\lambda_2&=\quad 3\end{aligned}$$

$2\lambda_1=8$, also Punkt stationär mit $\lambda_1=4,\ \lambda_2=-7$.

b) $\boldsymbol{H}_F = \left(\begin{array}{rrr|rr} 4 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Offensichtlich sind die Gradientenvektoren der NB $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, so dass der bei a) gefundene stationäre Punkt regulär ist.

Nun muss die Definitheit des (markierten) $\vec{x}$-Anteils der Hessematrix über dem Tangentialraum der Nebenbedingungen untersucht werden, dieser besteht aus den von Null verschiedenen Vektoren, die zu den Gradientenvektoren der beiden Nebenbedingungen orthogonal sind:

$\nabla g_1 \cdot \vec{z} = z_1 + z_2 - z_3 = 0$
$\nabla g_2 \cdot \vec{z} = z_1 - z_2 + z_3 = 0$

Durch Addition der beiden Zeilen ergibt sich $z_1 = 0$, durch Subtarktion $z_2 = z_3$.

Somit besteht der zu betrachtende Tangentialraum aus den Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \neq 0$.

$$\vec{z}^{\mathsf{T}} \nabla^2_{\vec{x}\vec{x}} F \, \vec{z} = (0 \quad z \quad z) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = 2z^2 > 0 \text{ für alle Vektoren } \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } z \neq 0$$

Somit ist der $\vec{x}$-Anteils der Hessematrix über dem Tangentialraum der Nebenbedingungen positiv definit, so dass in dem stationären Punkt $\left(3, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ein Minimum vorliegt. Weitere stationäre Punkte gibt es nicht, da das Gleichungssystem $\nabla F = \vec{0}$ eindeutig lösbar ist.

Bei a) wurde gezeigt, dass in dem stationären Punkt $\lambda_2 = -7$ ist, so dass sich der optimale Funktionswert bei Verminderung der Konstanten C_2 von 4 auf 3,9 entsprechend dem gegebenen Hinweis um $\Delta f \approx -\lambda_2 \Delta C_2 = -(-7)(-0{,}1) = -0{,}7$ ändert, d.h. um ca. 0,7 sinkt.

Mit dem Lagrange-Multiplikator können die Auswirkungen kleinerer Ressourcenänderungen leicht abgschätzt werden, ohne dass die neuen Optimalpunkte berechnet werden müssen.

Tatsächlich ergibt sich für $C_2 = 4$ das Minimum $f(3, -1{,}5, -0{,}5) = 18{,}75$, während sich für $C_2 = 3{,}9$ das Minumum $f(2{,}95, -1{,}45, -0{,}5) = 18{,}0575$ ergibt, so dass die tatsächliche Änderung $-0{,}6925$ beträgt.