Aufgabe 18.100

Wo nimmt die Funktion $f(x,y) = x^2y$ über dem im I. Quadranten $(x \geq 0, y \geq 0)$ gelegenen Teil des Ellipsenbogens $4x^2 + 9y^2 = 36$ ihren größten bzw. kleinsten Wert an?

Lösung:

$F(x,y,\lambda) = x^2y + \lambda(4x^2 + 9y^2 - 36)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 8\lambda x = 2x(y + 4\lambda) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ y = -4\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 18\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

Fallunterscheidung:

$\underline{x = 0:}$

Wegen $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ ist $y^2 = 4$ und damit $y = 2$ (da $y \geq 0$). Da somit $y \neq 0$ gilt, folgt aus $x^2 + 18\lambda y = 0$, dass $\lambda = 0$ ist. Stationärer Punkt ist somit $(x,y,\lambda) = (0,2,0)$.

$\underline{y = -4\lambda:}$

Wegen $x^2 + 18\lambda y = 0$ ist $x^2 = 72\lambda^2$, Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $288\lambda^2 + 144\lambda^2 - 36 = 0$, $\lambda^2 = \frac{36}{432} = \frac{1}{12}$, $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$. Wegen $y \leq 0$ bleibt nur $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $x^2 = 72\lambda^2 = 6$ und mit $x \geq 0$ schleißlich $x = \sqrt{6}$. Stationärer Punkt ist somit $(x,y,\lambda) = \left(\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

Da $f(x,y)$ über dem zu betrachtenden Bogenstück beschränkt und differenzierbar ist, können der größte und kleinste Funktionswert nur in den stationären Punkten oder am Rand liegen. Es gilt

$f(0,2) = 0, \quad f\left(\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}, \quad f(3,0) = 0.$ (Letzteres ist der zweite Randpunkt.)

Somit wird der kleinste Funktionswert 0 in den Randpunkten $(2,0)$ und $(0,3)$ und der größte Funktionswert $4\sqrt{3}$ im Punkt $\left(\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ angenommen.