Aufgabe 18.99

Wenden Sie die Einsetz- und die Lagrangemethode zur Bestimmung der Extrema der Funktion $f(x,y) = 1 + yx^2$ längs des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ an!

(nach Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. 7. Aufl. Vieweg+Teubner 2009, Beispiel 8.13, S. 359ff.)

Lösung:

Einsetzmethode: $x^2 = 1 - y^2$

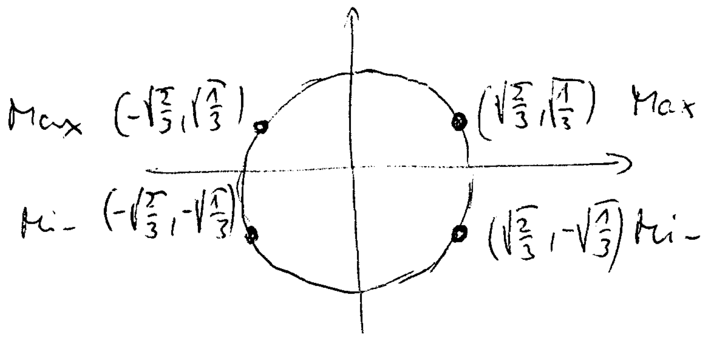
$\tilde{f}(y) = 1 + y(1-y^2) = 1 + y - y^3$

$\tilde{f}'(y) = 1 - 3y^2 = 0$ für $y^2 = \frac{1}{3}$, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\tilde{f}''(y) = -6y$, d.h. Max. bei $y = +\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$,

Min. bei $y = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Damit wurden 4 Extremstellen gefunden.



Beispiel Rundwanderweg
$f(x,y)$: Geländehöhe

Zwischen zwei Gipfeln muss ein Tal liegen, analog muss zwischen zwei Minima ein Maximum liegen.

Also:
Es fehlen (mindestens) 2 Extrema.

Lagrangemethode: Nebenbedingung in der Form $g(x,y) = 0$, d.h. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$,

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 1 + yx^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + 2\lambda x \\ x^2 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} F_x &= 2xy + 2\lambda x = 0 \quad & x(\lambda + y) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0 \text{ oder } \lambda = -y \\ F_y &= x^2 + 2\lambda y \ \ = 0 & \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0 & \end{aligned}$$

$x = 0$ (3. Gleichung)$\Rightarrow$ $y = \pm 1$ (2. Gleichung)$\Rightarrow$ $\lambda = 0$

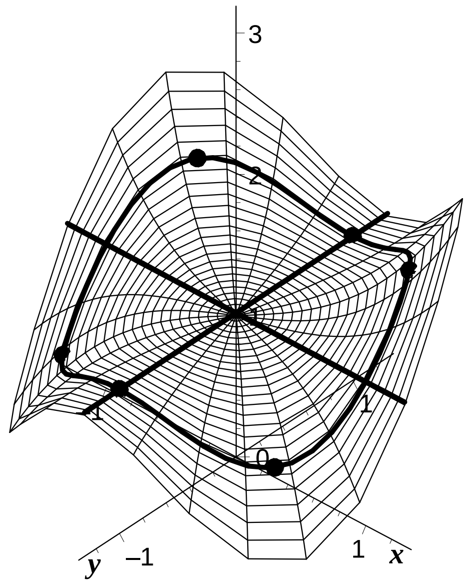
$\lambda = -y$ (2. Gleichung)$\Rightarrow$ $x^2 = 2y^2$ (3. Gleichung)$\Rightarrow$ $3y^2 = 1, y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}, x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ wie oben

Zusätzlich gefundene stationäre Punkte:

$(0,1)$: offensichtlich Min.,
$(0,-1)$: offensichtlich Max.

Bei der Einsetzmethode können Lösungen verloren gehen!

(Die beiden fehlenden stationären Punkte wurden mit der Einsetzmethode nicht gefunden, da dort $\tilde{f}(y)=1-y-y^3$ für beliebige $y\in\mathbb{R}$ behandelt wurde, diese Extrema liegen aber dann auf dem Rand (nur $-1\leq y\leq 1$ zulässig.).)



$f(x,y)=1+yx^2$ mit Niveaulinien $f=1$ und Extrema bezüglich der NB $x^2+y^2=1$

Vorliegend war die Art der mit der Lagrangemethode ermittelten Extrema durch die vorherige Lösung mit der Einsetzmethode bekannt. Ist das nicht der Fall (und kann man auch nicht durch den Aufgabenkontext auf die Extremwerteigenschaften schließen), müssen **hinreichende Bedingungen für die Lagrangemethode** untersucht werden:

Ein stationärer Punkt heißt **regulär**, falls der Gradient der Nebenbedingung in diesem Punkt ungleich dem Nullvektor ist, d.h. $\nabla g\neq\vec{0}$.
(Liegen mehrere NB vor, so müssen die Gradientenvektoren der Nebenbedingungen linear unabhängig sein.)

Vorliegend ist das der Fall: $g(x,y)=x^2+y^2-1$, $\nabla g=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ für alle 6 stationären Punkte.

Hessematrix: $\boldsymbol{H}_F=\left(\begin{array}{cc|c}2y+2\lambda & 2x & 2x\\ 2x & 2\lambda & 2y\\ \hline 2x & 2y & 0\end{array}\right)$, „$\vec{x}$-Anteil der Hessematrix": $\nabla^2_{\vec{x}\vec{x}}F=\begin{pmatrix}2y+2\lambda & 2x\\ 2x & 2\lambda\end{pmatrix}$

Im stationären Punkt $(\overline{\vec{x}},\overline{\lambda})$ liegt ein Minimum vor, wenn der $\vec{x}$-Anteil der Hessematrix über der Tangentialrichtung der Nebenbedingung positiv definit ist, ein Maximum liegt entsprechend bei negativer Definitheit vor.

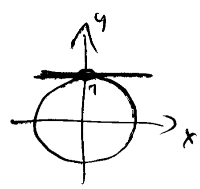
Die Tangentialrichtung der Nebenbedingung ist orthogonal zur Gradientenrichtung ∇g, d.h.
Maximum, wenn $\vec{z}^{\mathsf{T}}\nabla^2_{\vec{x}\vec{x}}F(\overline{\vec{x}},\overline{\lambda})\vec{z}>0$ für alle $\vec{z}$ mit $\nabla g(\overline{\vec{x}})\cdot\vec{z}=0,\ \vec{z}\neq\vec{0}$,
Minimum, wenn $\vec{z}^{\mathsf{T}}\nabla^2_{\vec{x}\vec{x}}F(\overline{\vec{x}},\overline{\lambda})\vec{z}<0$ für alle $\vec{z}$ mit $\nabla g(\overline{\vec{x}})\cdot\vec{z}=0,\ \vec{z}\neq\vec{0}$.

(Liegen mehrere NB vor, so muss der $\vec{x}$-Anteil der Hessematrix über dem Tangentialraum der Nebenbedingungen positiv bzw. negativ definit sein, bei diesem handelt es sich um die lineare Approximation der Nebenbedingungen, d.h., die Orthogonalität zum Gradienten muss bei allen Nebenbedingungen erfüllt sein.)

Wir betrachten konkret den stationären Punkt $(\overline{x},\overline{y},\overline{\lambda})=(0,1,0)$:

$\nabla^2_{\vec{x}\vec{x}}F(0,1,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\nabla g(0,1)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$\nabla g(0,1)\cdot\vec{z}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=2z_2=0 \iff z_2=0,\ z_1$ beliebig, $\vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\0\end{pmatrix}$,
die Tangentialrichtung ist parallel zur x-Richtung.



$\vec{z}^{\mathsf{T}}\nabla^2_{\vec{x}\vec{x}}F(0,1,0)\,\vec{z} = (z_1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2z_1^2 > 0$ offensichtlich für alle $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

also über der Tangentialrichtung positiv definit und damit Minimum für $(\bar{x},\bar{y}) = (0,1)$,

analog über der Tangentialrichtung negativ definit und damit Minimum für $(\bar{x},\bar{y}) = (0,-1)$.