Aufgabe 18.98

Unter der Annahme, dass sich die Nachfragefunktionen nicht ändern, sollen die wirtschaftlichen Auswirkungen einer möglichen Verschmelzung der Firmen Seeblick GmbH und Landblick GmbH aus Aufgabe 18.10 untersucht werden.

a) Geben Sie den Umsatz der Gesamtfirma als Funktion $U(p_1, p_2)$ an!
b) Ermitteln Sie das totale Differenzial dieser Funktion!
c) Der Preis p_1 soll von 70 auf 72 € und gleichzeitig der Preis p_2 von 35 bzw. 36 € erhöht werden. Ermitteln Sie die daraus resultierende Umsatzänderung näherungsweise mit dem totalen Differenzial und vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Umsatzänderung!
d) Die Gesamtfirma will ihren Umsatz maximieren. Wie sind die Preise festzusetzen, welcher Umsatz wird dabei erzielt?
e) Für das konstante Umsatzniveau $U(p_1,p_2)=12\,000$ [€] soll der Zusammenhang zwischen den Preisen durch die Funktion $p_2=\varphi(p_1)$ beschrieben werden. Bestimmen Sie $\varphi(60)$ und durch implizite Differenziation $\varphi'(60)$!
f) Bestimmen Sie aus $\varphi(60)$ und $\varphi'(60)$ einen Näherungswert für $\varphi(61)$ und vergleichen Sie diesen Näherungswert mit dem exakten Wert!

Lösung:

a) $U(p_1,p_2) = U_1(p_1,p_2)+U_2(p_1,p_2) = 200p_1+180p_2-2p_1^2+2p_1p_2-3p_2^2$

b) $\dfrac{\partial U}{\partial p_1} = 200-4p_1+2p_2,\quad \dfrac{\partial U}{\partial p_2} = 180+2p_1-6p_2$

$\mathrm{d}U = (200-4p_1+2p_2)\mathrm{d}p_1 + (180+2p_1-6p_2)\mathrm{d}p_2 = (200-4p_1+2p_2)\Delta p_1 + (180+2p_1-6p_2)\Delta p_2$

c) $\Delta U \approx \mathrm{d}U = \dfrac{\partial U}{\partial p_1}(70,35)\Delta p_1 + \dfrac{\partial U}{\partial p_2}(70,35)\Delta p_2 = -10\cdot 2+110\cdot 1 = 90,$

$\Delta U = U(72,36)-U(70,35) = 11\,808-11\,725 = 83$

d) $\nabla U = \begin{pmatrix} 200-4p_1+2p_2 \\ 180+2p_1-6p_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{array}{lll} 200-4p_1+2p_2=0 & & + \\ 180+2p_1-\ \ 6p_2=0 & \mid\cdot 2 & \\ 360+4p_1-10p_2=0 & & \mid + \\ 560 \qquad\ -10p_2=0, & p_2=56,\ p_1=\dfrac{6p_2-180}{2}=78 & \end{array}$$

Also ist $(78,56)$ der einzige stationäre Punkt.

$\det \boldsymbol{H}_U(p_1,p_2) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 20>0 \implies$ Extremum, $U_{p_1p_1} = -4<0 \implies$ Maximum.

Der maximal erzielbare Umsatz beträgt $U(78,56)=12840$ [€], während bei voneinander unabhängiger Umsatzmaximierung durch die beiden Firmen gemäß Aufgabe 18.10 nur $U(60,40)=12000$ [€] erzielt werden.

e) $U(60,p_2) = 12\,000+180p_2-7200+120p_2-3p_2^2 = 12\,000,\quad 3p_2^2-300p_2+7200=0,$

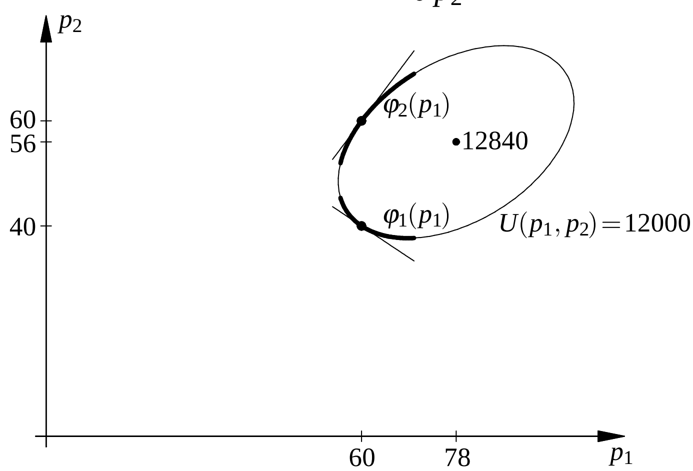
$p_2^2-100p_2+2400=0,\quad p_{21/2} = 50\pm\sqrt{2500-2400} = 40;\,60$

Bei einem Preis von $p_1=60$ ist ein Gesamtumsatz von 12 000 Euro nicht nur mit dem von oben bereits bekannten $p_2=40$, sondern auch mit $p_2=60$ erzielbar. (Bei getrenntem Wirtschaften würde das aber nicht eintreten, da bei diesem Preis p_2 der Preis p_1 erhöht werden könnte.)

Die implizite Auflösung von $U(p_1,p_2)=12\,000$ ist nur in der Umgebung der ermittelten Punkte möglich, da die Funktion sonst nicht eindeutig würde. Deshalb müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Umgebung von $(60,40)$: $\varphi_1(60)=40,\;\; \varphi_1'(60)=-\dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial p_1}(60,40)}{\dfrac{\partial U}{\partial p_2}(60,40)}=-\dfrac{40}{60}=-\dfrac{2}{3}$

Umgebung von $(60,60)$: $\varphi_2(60)=60,\;\; \varphi_2'(60)=-\dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial p_1}(60,60)}{\dfrac{\partial U}{\partial p_2}(60,60)}=-\dfrac{80}{-60}=\dfrac{4}{3}$



f) Die Approximation erfolgt durch Abbruch der Taylorentwicklung nach dem linearen Glied (Tangente). Auch dabei müssen die beiden eben betrachteten Fälle unterschieden werden:

Umgebung von $(60,40)$: $\varphi_1(61)\approx\varphi_1(60)+\varphi_1'(60)(61-60)=40-\dfrac{2}{3}\cdot 1\approx 39.33$

Umgebung von $(60,60)$: $\varphi_2(61)\approx\varphi_2(60)+\varphi_2'(60)(61-60)=60+\dfrac{4}{3}\cdot 1\approx 61.33$

Die exakten Werte für $\varphi_i(61)$ erhält man durch Lösung der Gleichung $U(61,p_2)=12\,000$:
$U(61,p_2)=12\,200+180p_2-7442+122p_2-3p_2^2=12\,000,\quad 3p_2^2-302p_2+7242=0,$

$p_2^2-\dfrac{302}{3}p_2+\dfrac{7242}{3}=0,\quad p_{2\,1/2}=\dfrac{151}{3}\pm\sqrt{\dfrac{22801}{9}-\dfrac{21726}{9}}=\dfrac{151\pm\sqrt{1075}}{3}\approx 39.40;\,61.26.$

Also gilt $\varphi_1(61)\approx 39.40$ und $\varphi_2(61)\approx 61.26$. Mittels linearer Taylorapproximation waren als Näherungen dafür 39.33 bzw. 61.33 ermittelt worden.