Aufgabe 18.97

Unter der Annahme, dass sich die Aufwendungen und die Nachfragefunktionen nicht ändern, sollen die wirtschaftlichen Auswirkungen einer möglichen Verschmelzung der beiden Firmen aus Aufgabe 18.9 untersucht werden.

a) Geben Sie den Gewinn der Gesamtfirma als Funktion $G(p_1, p_2)$ an!
b) Ermitteln Sie das totale Differenzial dieser Funktion!
c) Der Preis p_1 soll von 17,00 auf 17,10 € und gleichzeitig der Preis p_2 von 7,50 bzw. 7,55 € erhöht werden. Ermitteln Sie die daraus resultierende Gewinnänderung näherungsweise mit dem totalen Differenzial und vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Gewinnänderung!
d) Die Gesamtfirma will ihren Gewinn maximieren. Wie sind die Preise festzusetzen, welcher Gewinn wird dabei erzielt?

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} G(p_1,p_2) &= (39-3p_1+3p_2)(p_1-6)+(15+4p_1-9p_2)(p_2-3)\\ &= 39p_1-3p_1^2+3p_1p_2-234+18p_1-18p_2+15p_2+4p_1p_2-9p_2^2-45-12p_1+27p_2\\ &= -3p_1^2+7p_1p_2-9p_2^2+45p_1+24p_2-279 \end{aligned}$$

b)
$$\frac{\partial G}{\partial p_1} = -6p_1+7p_2+45, \quad \frac{\partial G}{\partial p_2} = 7p_1-18p_2+24$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G &= (-6p_1+7p_2+45)\,\mathrm{d}p_1+(7p_1-18p_2+24)\,\mathrm{d}p_2\\ &= (-6p_1+7p_2+45)\,\Delta p_1+(7p_1-18p_2+24)\,\Delta p_2 \end{aligned}$$

c)
$$\Delta G \approx \mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial p_1}(17,7.5)\,\Delta p_1+\frac{\partial G}{\partial p_2}(17,7.5)\,\Delta p_2 = -4.5\cdot 0.1+8\cdot 0.05 = -0.05$$

$$\Delta G = G(17.1,7.55)-G(17,7.5) = 185.1825-185.25 = -0.0675$$

Mit dem totalen Differenzial ergibt sich eine näherungsweise Gewinnminderung um 500 €, während die tatsächliche Gewinnminderung 675 € beträgt.

(Mit dem totalen Differenzial wird insbesondere richtig vorausgesagt, dass die gewinnmindernde Preiserhöhung von p_1 durch die gewinnsteigernde Preiserhöhung von p_2 (fast) kompensiert wird. Zur Ursache der gegenläufigen Auswirkungen der beiden Preiserhöhungen beachte man das Ergebnis von d)!)

d)
$$\nabla G = \begin{pmatrix} -6p_1+7p_2+45\\ 7p_1-18p_2+24 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{rl} -6p_1+7p_2+45=0 & |\cdot 7\\ 7p_1-18p_2+24=0 & |\cdot 7\\ -42p_1+49p_2+314=0 & |+\\ 42p_1-108p_2+144=0 & |+\\ -59p_2+459=0 & \Longrightarrow\ p_2=\dfrac{459}{59}\approx 7.78,\\ 6p_1=7p_2+45=\dfrac{5868}{59}, & p_1=\dfrac{978}{59}\approx 16.58 \end{array}$$

$$\boldsymbol{H}_G = \begin{pmatrix} -6 & 7\\ 7 & -18 \end{pmatrix}, \quad \det \boldsymbol{H}_G = 59 > 0, \quad G_{p_1p_1} = -6 < 0,$$

also liegt in dem ermittelten einzigen stationären Punkt ein Maximum vor. Somit ist der Preis p_1 zu 16,58 € und der Preis p_2 zu 7,78 € festzusetzen, damit maximaler Gewinn erzielt wird. Dieser beträgt ca. 1 873 220 €.