Aufgabe 18.95

Sei $f(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 - 36x + 2y$.

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen!
b) Durch $f(x,y)=0$ sei in der Umgebung des Punktes $(x,y)=(0,0)$ eine Funktion $y=\varphi(x)$ definiert. Bestimmen Sie durch implizite Differenziation $\varphi'(0)$ und mit Hilfe dieser Ableitung einen Näherungswert für $\varphi(0.0001)$!
c) Führen Sie für die Niveaulinien $f(x,y)=C$ die Hauptachsentransformation aus!
d) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
e) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion $f(x,y)$!

Lösung:

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16x - 12y - 36 \\ -12x + 34y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 16x - 12y &= 36 \quad |:4 \\ -12x + 34y &= -2 \quad\quad |+ \\ 4x - 3y &= 9 \quad |\cdot 3 \\ 12x - 9y &= 27 \quad\quad |+ \\ 25y &= 25, \quad y=1 \\ 4x = 3y+9 &= 12, \quad x=3 \end{aligned}$$

Stationär ist also nur der Punkt $(3,1)$.

$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = 16\cdot 34 - 12^2 = 400 > 0 \implies$ Extremum,

$f_{xx} = 16 > 0 \implies f(3,1) = -53$ ist Minimum.

Zur Extremwertuntersuchung können auch die Eigenwerte von $\boldsymbol{H}_f$ genutzt werden. In Aufgabe 22.3 werden die Eigenwerte von $\frac{1}{2}\boldsymbol{H}_f$ bestimmt. Sie sind beide positiv, also ist auch $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit, so dass im stationären Punkt $(3,1)$ ein Minimum vorliegt.

b) $\varphi'(0) = -\dfrac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\dfrac{-36}{2} = \underline{\underline{18}}$

$\varphi(0.0001) \approx \varphi(0) + \varphi'(0)(0.0001-0) = 0 + 18\cdot 0.0001 = \underline{\underline{0.0018}}$

(Exakt wäre $\varphi(0.0001)$ durch Lösung der Gleichung
$8\cdot 0.0001^2 - 12\cdot 0.0001\,y + 17y^2 - 36\cdot 0.0001 + 2y = 0$
zu ermitteln, es ergibt sich $y_{1/2} = 0.00177426638;\ -0.1193507370$,
so dass $\varphi(0.0001) = 0.00177426638$ gilt.)

c) $f(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 - 36x + 2y = C$

$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-36 \;\; 2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - C = 0$

$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ -6 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(17-\lambda)^2 - 36^2 = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,\ \lambda_{1,2} = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - \frac{400}{4}} = \begin{cases} 5 \\ 20 \end{cases}$

EV zu $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{array}{rr} 3 & -6 \\ -6 & 12 \\ \hline 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \text{EV} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ normiert } \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 20$:

$$\begin{array}{rr} -12 & -6 \\ -6 & -3 \\ \hline 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \text{EV} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ normiert } \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Substitution: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

$$(\xi \quad \eta)\, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + (-36 \quad 2) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} - C = 0$$

$$(\xi \quad \eta) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{70}{\sqrt{5}} & \frac{40}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} - C = 0$$

$$5\xi^2 + 20\eta^2 - \frac{70}{\sqrt{5}}\,\xi + \frac{40}{\sqrt{5}}\,\eta - C = 0$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$5\left(\xi^2 - \frac{14}{\sqrt{5}}\xi\right) + 20\left(\eta^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\eta\right) - C = 5\left(\xi - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 - 49 + 20\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4 - C = 0$$

und damit $5\left(\xi - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = C + 53$ bzw. $\dfrac{\left(\xi - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{C+53}{5}} + \dfrac{\left(\eta + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{C+53}{20}} = 1.$

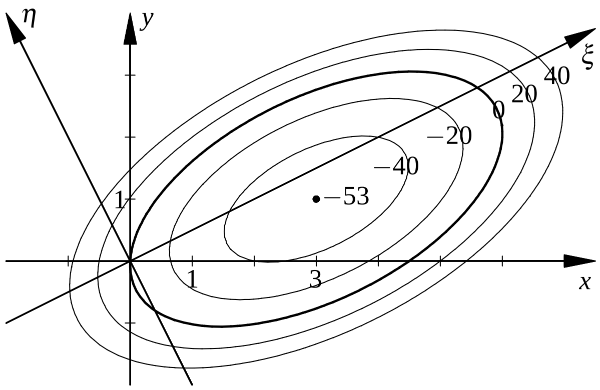
An der linken Darstellung in der letzten Zeile sieht man, dass es nur für $C \geq -53$ Niveaulinien gibt. Das Niveau $C = -53$ wird nur im Punkt $(\xi, \eta) = (7/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ angenommen. Im Ausgangskoordinatensystem ist das der schon aus a) bekannte Punkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $C > -53$ handelt es sich bei den Niveaulinien um Ellipsen mit dem Mittelpunkt $(\xi, \eta) = (7/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$ und den Halbachsen $\sqrt{(C+53)/5}$ und $\sqrt{(C+53)/20}$.

d) Um das Niveaulinienbild im Ausgangskoordinatensystem zeichnen zu können, benötigt man den Drehwinkel. Es gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$. Damit ist $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$ und $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, also $\alpha \approx 26.57^\circ$. Das ξ–η–System entsteht durch Drehung des x–y–Systems um 26.57° in positive Richtung.

Die Niveaulinien sind Ellipsen um den Punkt $(\xi, \eta) = (7/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) \mathrel{\hat{=}} (x, y) = (3, 1)$, ihre Halbachsen stehen im Verhältnis $\sqrt{(C+53)/5} : \sqrt{(C+53)/20} \mathrel{\hat{=}} \sqrt{20} : \sqrt{5} = 2 : 1$.



e) Unter c) wurde ermittelt, dass es Niveaulinien $f(x, y) = C$ für alle C mit $C \geq -53$ gibt. Also ist $\mathrm{WB}(f) = [-53, \infty)$.