Aufgabe 18.93

Sei $f(x,y) = x^4 - 4xy^3 + 96y + 72.$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf stationäre Punkte und Extremwerte!

b) In der Umgebung von $(x,y)=(2,-1)$ sei durch $f(x,y)=0$ eine Funktion $y=\varphi(x)$ definiert. Ermitteln Sie durch implizite Differenziation einen Näherungswert für $\varphi(2.01)$!

Lösung:

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y^3 \\ -12xy^2 + 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$4x^3 - 4y^3 = 0 \iff x = y$

$-12xy^2 + 96 = -12x^3 + 96 = 0, \quad 12x^3 = 96, \quad x^3 = 8$

$\Longrightarrow \quad (x,y) = (2,2)$ ist einziger stationärer Punkt.

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -12y^2 \\ -12y^2 & -24xy \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}_f(2,2) = \begin{pmatrix} 48 & -48 \\ -48 & -96 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f(2,2) = -48 \cdot 96 - 48^2 < 0 \Longrightarrow$ Sattelpunkt, kein Extremum

Also hat die Funktion keine Extremwerte.

b) $$\varphi'(x) = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{4x^3 - 4y^3}{-12xy^2 + 96}$$

$$\varphi'(2) = -\frac{32+4}{-24+96} = -\frac{36}{72} = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi(2.01) \approx \varphi(2) + \varphi'(2)(2.01-2) = -1 - \frac{1}{2}0.01 = -1.005$$

(Exakt gilt $\varphi(2.01) \approx -1.005050421$.)