

Aufgabe 18.92

Sei $f(x, y) = y^4 - 4x^3y + 96x - 1$.

- Untersuchen Sie die Funktion auf stationäre Punkte und Extremwerte!
- In der Umgebung von $(x, y) = (0, 1)$ sei durch $f(x, y) = 0$ eine Funktion $y = \varphi(x)$ definiert. Ermitteln Sie durch implizite Differenziation einen Näherungswert für $\varphi(0.001)$!

Lösung:

$$\text{a) } \nabla f = \begin{pmatrix} -12x^2y + 96 \\ 4y^3 - 4x^3 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{array}{l} -12x^2y + 96 = 0 \\ 4y^3 - 4x^3 = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} -12x^3 + 96 = 0, \quad x^3 = 8, \quad x = 2 \\ y^3 = x^3, \quad y = x \end{array}$$

Also ist $(x, y) = (2, 2)$ der einzige stationäre Punkt.

$$\mathbf{H}_f = \begin{pmatrix} -24xy & -12x^2 \\ -12x^2 & 12y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_f(2, 2) = \begin{pmatrix} -96 & -48 \\ -48 & 48 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{H}_f(2, 2) = -96 \cdot 48 - 48 \cdot 48 < 0,$$

folglich hat die Funktion keine Extremwerte.

$$\text{b) } \varphi'(x) = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{-12x^2y + 96}{4y^3 - 4x^3}, \quad \varphi'(0) = -\frac{96}{4} = -24$$

$$\varphi(0.001) \approx \varphi(0) + 0.001 \varphi'(0) = 1 + 0.001 \cdot (-24) = \underline{\underline{0.976}}$$

(Exakt gilt $\varphi(0.001) = 0.9750841748$.)