Aufgabe 18.89

a) Ermitteln Sie die Extrema von $f(x,y,z)=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\quad (x,y,z>0)$!

b) Hat die Funktion über dem I. Oktanten globale Extrema?

Lösung:

a) $$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{1}{y+z}-\frac{y}{(x+z)^2}-\frac{z}{(x+y)^2}\\ \frac{1}{x+z}-\frac{x}{(y+z)^2}-\frac{z}{(x+y)^2}\\ \frac{1}{x+y}-\frac{x}{(y+z)^2}-\frac{y}{(x+z)^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies \frac{z}{(x+y)^2}=\frac{1}{y+z}-\frac{y}{(x+z)^2}=\frac{1}{x+z}-\frac{x}{(y+z)^2},$$
$$\frac{1}{y+z}+\frac{x}{(y+z)^2}=\frac{1}{x+z}+\frac{y}{(x+z)^2},\ \frac{x+y+z}{(y+z)^2}=\frac{x+y+z}{(x+z)^2}.$$

Wegen $x,y,z>0$ folgt $y+z=x+z$, analog ergibt sich $x+z=x+y$ und $x+y=x+z$. Somit sind alle Punkte mit $x=y=z$ stationäre Punkte.

Da alle Punkte des Strahls $x=y=z>0$ stationäre Punkte sind und dort konstant $f(x,y,z)=f(x,x,x)=\frac{3}{2}$ gilt, kann die Hessematrix in den stationären Punkten weder positiv noch negativ definit sein, so dass die Extremwertuntersuchung mithilfe der Hessematrix nicht zum Ziel führen kann.

Offensichtlich ist die Funktion $f(x,y,z)$ auf jedem vom Koordinatenursprung ausgehenden Strahl innerhalb des I. Oktanten konstant. Über dem I. Oktanten gilt $f(x,y,z)>0$, die Funktion $f(x,y,z)$ ist also nach unten beschränkt. Mit Ausnahme der Koordinatenachsen ist die Funktion auch auf den Randflächen des I. Oktanten definiert und positiv. Bei Annäherung an die Koordinatenachsen, auf denen ja zwei der Variablen gleich 0 sind, streben die Werte der Funktion gegen ∞, ansonsten ist die Funktion auch an den Randflächen des I. Oktanten stetig. Da sie nach unten beschränkt ist, muss es deshalb ein Minimum geben, dieses kann nur für $x=y=z$ angenommen werden. Wegen $f(x,x,x)\equiv\frac{3}{2}$ wird das Minimum in allen diesen Punkten angenommen.

b) Auf Grund der Überlegungen von a) liegen in den stationären Punkten (x,x,x) globale Minima vor, minimaler Funktionswert ist $\frac{3}{2}$. Ein globales Maximum gibt es nicht, da die Funktion bei Annäherung an die Koordinatenachsen unendlich groß wird. Z.B. gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,1,1)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x+1}\right)=\infty$.