Aufgabe 18.88

Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x\left(x^2+y^2+z^2+\frac{3}{4}\right)$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Extremstellen!
b) Hat die Funktion globale Extrema?
c) Ermitteln Sie den größten und kleinsten Wert der Funktion über dem Würfel $\{(x,y,z): |x|\le 1, |y|\le 1, |z|\le 1\}$!

Lösung:

a) $\nabla f=\mathrm{e}^x\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+\frac{3}{4}+2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$. Wegen $\mathrm{e}^x\neq 0$ folgt $y=z=0$ und damit $x^2+2x+\frac{3}{4}=0$,

$x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$. Stationäre Punkte sind also $\left(-\frac{3}{2},0,0\right)$ und $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$.

$$\boldsymbol{H}_f=\mathrm{e}^x\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2+4x+\frac{11}{4} & 2y & 2z \\ 2y & 2 & 0 \\ 2z & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_f\left(-\frac{3}{2},0,0\right)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det\boldsymbol{H}_1=-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}<0,\ \ \det\boldsymbol{H}_2=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}<0 \implies \text{kein Extremum},$$

$$\boldsymbol{H}_f\left(-\frac{1}{2},0,0\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det\boldsymbol{H}_1=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0,\ \ \det\boldsymbol{H}_2=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}>0,\ \ \det\boldsymbol{H}_3=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0$$
$$\implies \text{positiv definit, Minimum.}$$

Also gibt es nur ein lokales Extremum: das Minimum $f\left(-\frac{1}{2},0,0\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 0.60653$.

b) Offensichtlich kann $f(x,y,z)$ beliebig groß werden, so dass es kein globales Maximum gibt. Ferner gilt $f(x,y,z)>0$. Hält man z.B. $y=z=0$ fest und lässt $x\to-\infty$ gehen, so erhält man nach der l'Hospitalschen Regel

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0,0)=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x(x^2+\frac{3}{4})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+\frac{3}{4})}{\mathrm{e}^{-x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^{-x}}=0.$$

Da der Grenzwert 0 nirgends erreicht wird, gibt es auch kein globales Minimum.

c) Über dem Würfel gilt offensichtlich $f(x,y,z)\le\mathrm{e}^1(1+1+1+\frac{3}{4})=\frac{15}{4}\mathrm{e}\approx 10.19356$, dieser Wert wird für die 4 Punkte $(1,\pm1,\pm1)$ angenommen. Weiterhin gilt $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x(x^2+y^2+z^2+\frac{3}{4})\ge\mathrm{e}^x(x^2+\frac{3}{4})=f(x,0,0)$. Aus dem Ergebnis von a) folgt, dass $f(-\frac{1}{2},0,0)\approx 0.60653$

einziges lokales Minimum von $f(x,0,0)$ für $-1 < x < 1$ ist. Für die Funktionswerte an den Rändern gilt $f(1,0,0) > f(-1,0,0) = \frac{7}{4}e^{-1} \approx 0.64378 > 0.60653$.

Also ist $f(1,\pm 1,\pm 1) = \frac{15}{4}e \approx 10.19356$ der größte und $f(-\frac{1}{2},0,0) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.60653$ der kleinste Funktionswert über dem Würfel $\{(x,y,z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$.