Aufgabe 18.86

Ermitteln Sie, sofern existent, die lokalen und globalen Extremstellen der Funktionen

a) $f(x,y) = x^2 - 6xy + y^2 + 6\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y$,
b) $f(x,y,z) = 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 4xy + 4yz + 16x + 32y + 32z$!

Von welcher Art sind die Niveaulinien bzw. Niveauflächen dieser Funktionen? Welcher Zusammenhang besteht zu den Aufgaben 17.17 und 17.41?

Lösung:

a)
$$\begin{array}{rl} f_x = 2x - 6y + 6\sqrt{2} = 0 & |\ast 3 \\ f_y = -6x + 2y + 6\sqrt{2} = 0 & |+ \\ 6x - 18y + 18\sqrt{2} = 0 & |+ \\ -16y + 24\sqrt{2} = 0 & \end{array} \qquad y = \frac{3}{2}\sqrt{2},\ x = 3y - 3\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

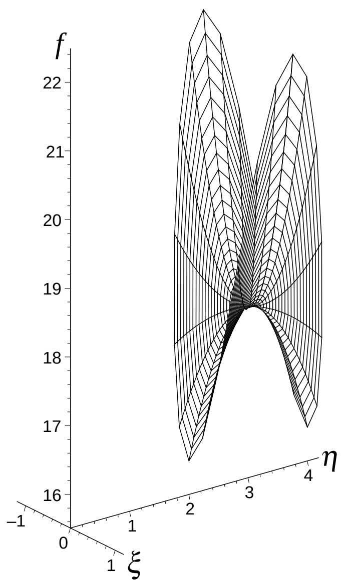
einziger stationärer Punkt: $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$

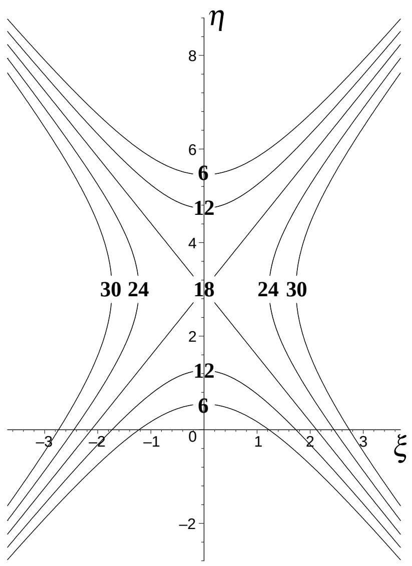
$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = 4 - 36 = -32 < 0 \implies$ kein Extremum (Sattelpunkt)

Lokale Extremstellen existieren also nicht. Hält man $y = 0$ fest, so ist $f(x,0) = x^2 + 6\sqrt{2}x \longrightarrow \infty$ für $x \to \infty$, setzt man $x = y$, so ist $f(x,y) = -4x^2 + 12\sqrt{2}x \longrightarrow -\infty$ für $x \to \infty$. Also existieren auch keine globalen Extremstellen.

Man kann auch mit den Überlegungen zu Aufgabe 17.17 argumentieren: Es gilt $f(x,y) = \widetilde{f}(\xi,\eta) = 4\xi^2 - 2(\eta-3)^2 + 18$. Offensichtlich gilt $\widetilde{f} \to \infty$ für $\xi \to \pm\infty$ und $\widetilde{f} \to -\infty$ für $\eta \to \pm\infty$.

Ebenso ergibt sich aus den Überlegungen zu Aufgabe 17.17, dass es sich bei den Niveaulinien $f(x,y) = \widetilde{f}(\xi,\eta) = C$ um die Hyperbeln $4\xi^2 - 2(\eta-3)^2 = C - 18$ handelt. Im Falle $C = 18$ ergibt sich das Paar sich schneidender Geraden aus Aufgabe 17.17.





b) $f_x = 8x + 4y + 16 \qquad = 0$
$f_y = 10y + 4x + 4z + 32 = 0$
$f_z = 12z + 4y + 32 \qquad = 0$

$$\begin{array}{rrr|r} 8 & 4 & 0 & -16 \\ 4 & 10 & 4 & -32 \\ 0 & 4 & 12 & -32 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Einziger stationärer Punkt ist somit $(-1,-2,-2)$.

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad 8 > 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 64 > 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 960 - 128 - 192 > 0$$

Da alle Hauptminoren positiv sind, ist $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit, so dass ein lokales Minimum in $f(-1,-2,-2) = -72$ vorliegt.

Nach den Überlegungen zu Aufgabe 17.41 gilt
$f(x,y,z) = \widetilde{f}(\xi,\eta,\zeta) = 8(\xi^2+3)^2 + 5\eta^2 + 2\zeta^2 - 72 \geq -72$. Folglich liegt ein globales Minimum vor für $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Nach oben ist die Funtkion unbeschränkt, es existiert kein globales Maximum. Niveauflächen sind die Ellipsoide $8(\xi^2+3)^2 + 5\eta^2 + 2\zeta^2 = C + 72$ für $C \geq -72$.