Aufgabe 18.85

Sei $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+2z+x$.

a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von $f(x,y,z)$ und ermitteln Sie durch Definitheitsuntersuchung der Hessematrix, ob es sich um Extrema handelt und von welchem Typ diese sind!

b) Beseitigen Sie in $f(x,y,z)$ durch Hauptachsentransformation das gemischte Glied! Welche Art haben die Niveauflächen der Funktion, welches sind ihre globalen Extremwerte?

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Wegen?

Lösung:

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x-y+1 \\ 2y-x \\ 2z+2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow z=-1, \quad \begin{aligned} 2x-\ \ y &= -1 \\ -x+2y &= \ \ 0 \\ -2x+4y &= \ \ 0 \end{aligned}$

$$3y=-1,\ y=-\frac{1}{3},\ x=-\frac{2}{3}$$

Einziger stationärer Punkt ist somit $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-1\right)$.

$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Hauptminoren: $2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3>0$,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6>0$$

Alle Hauptminoren positiv $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit

$$\Longrightarrow \text{Minimum } f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-1\right) = \frac{4}{9}+\frac{1}{9}+1-\frac{2}{9}-2-\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$$

b) $f(x,y,z) = (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (1\ \ 0\ \ 2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-\frac{1}{4}\right] = (1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}\right) = 0,$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_{2/3} = 1\pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2};\frac{1}{2}$$

Alle Eigenwerte sind positiv, also sind die Niveauflächen $f(x,y,z)=C$ Ellipsoide.

EV zu $\frac12$: $\begin{array}{rrr} \frac12 & -\frac12 & 0 \\ -\frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$ EV $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, norm. $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

EV zu 1: $\begin{array}{rrr} 0 & -\frac12 & 0 \\ -\frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$ EV $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, ist normiert

EV zu $\frac32$: $\begin{array}{rrr} -\frac12 & -\frac12 & 0 \\ -\frac12 & -\frac12 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac12 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$ EV $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, norm. $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Matrix aus den normierten EV: $\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt2 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}1 & -\frac12 & 0\\ -\frac12 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix}\frac12 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac32\end{pmatrix}$$

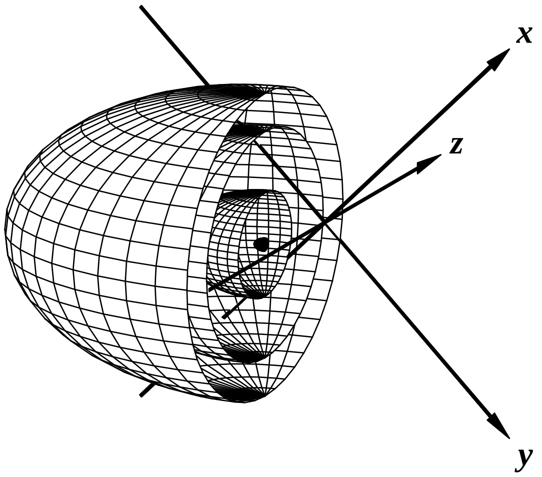
$$f(x,y,z) = \tilde f(\xi,\eta,\zeta) = (\xi \;\; \eta \;\; \zeta)\begin{pmatrix}\frac12 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt2}(1\;\;0\;\;2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

$$= \frac12\xi^2+\eta^2+\frac32\zeta^2+\frac{1}{\sqrt2}\xi+2\eta+\frac{1}{\sqrt2}\zeta = \frac12(\xi^2+\sqrt2\xi)+(\eta^2+2\eta)+\frac32\left(\zeta^2+\frac{\sqrt2}{3}\zeta\right)$$

$$= \frac12\left(\xi+\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 - \frac12\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 + (\eta+1)^2 - 1 + \frac32\left(\zeta+\frac{1}{3\sqrt2}\right)^2 - \frac32\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2$$

$$= \frac12\left(\xi+\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 + (\eta+1)^2 + \frac32\left(\zeta+\frac{1}{3\sqrt2}\right)^2 - \frac14 - 1 - \frac32\,\frac{1}{9\cdot2}$$

$$= \frac12\left(\xi+\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 + (\eta+1)^2 + \frac32\left(\zeta+\frac{1}{3\sqrt2}\right)^2 - \frac43$$



Schnitt durch die Niveauflächen (Ellipsoide)

$f(x,y,z) = \tilde f(\xi,\eta,\zeta) = -\frac43$ (Punkt),
0,
5,
10

(Achsen jeweils dargestellt von -5 bis 5.)

Wegen $f(x,y,z) = \tilde f(\xi,\eta,\zeta) = \frac12\left(\xi+\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 + (\eta+1)^2 + \frac32\left(\zeta+\frac{1}{3\sqrt2}\right)^2 - \frac43$ hat $f(x,y,z)$ offensichtlich ein globales Minimum mit $f = -\frac43$ und kein globales Maximum. Das globale Minimum wird für $\xi = -\frac{1}{\sqrt2}$, $\eta = -1$, $\zeta = -\frac{1}{3\sqrt2}$ angenommen, das ist der schon aus a)

bekannte Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1 \\ -1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
An dem Niveaulinienbild wird auch deutlich, dass es außer dem globalen Minimum keine weiteren Extremstellen gibt.

c) Da es sich bei $f(x,y,z)$ um eine quadratische Funktion handelt, ist ihre Hessematrix konstant. Deshalb wurde in a) und b) bis auf den Faktor 2 die gleiche Matrix verwendet. Da alle Eigenwerte positiv sind, ist die Hessematrix positiv definit, was bei a) mit den Hauptminoren gezeigt wurde. Da die Eigenwerte alle positiv sind, enthält die Funktion in Hauptachsenform außer dem linearen Term nur quadratische Terme mit positiven Koeffizienten, so dass das Minimum ablesbar ist.