Aufgabe 18.84

Sei $f(x,y) = 10x^2 + 12xy + 10y^2 + 8x + 24y,\ x,y \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen!
b) Führen Sie für die Niveaulinien $f(x,y) = C$ die Hauptachsentransformation aus!
c) Skizzieren Sie das Niveaulinienbild im transformierten Koordinatensystem und im Ausgangssystem!
d) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion $f(x,y)$!

Lösung:

a) $f_x = 20x + 12y + 8 = 0 \ |\cdot 3 \quad 60x + 36y + 24 = 0 \ |-$

$f_y = 12x + 20y + 24 = 0 \ |\cdot 5 \quad 60x + 100y + 120 = 0 \ |+ \quad 64y + 96 = 0,\ y = -\frac{3}{2},$

stationär nur $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ $\qquad x = -\frac{12y+8}{20} = \frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 20 \end{pmatrix},\ \det \boldsymbol{H}_f = 400 - 144 > 0 \implies \text{Extremum},\quad f_{xx} = 20 > 0 \implies \text{Minimum}$$

Einzige Extremstelle ist das Minimum $f(0{,}5,\ -1{,}5) = -16$.

b) $f(x,y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (8 \quad 24)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 100 - 20\lambda + \lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0,\ \lambda_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100-64} = \begin{cases} 16 \\ 4 \end{cases}$$

EV zu $\lambda_1 = 16$

$\begin{array}{rr} -6 & 6 \\ 6 & -6 \\ \hline \end{array}$ norm. EV $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = 4$

$\begin{array}{rr} 6 & 6 \\ 6 & 6 \\ \hline \end{array}$ norm. EV $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Drehung kann also nach der Vorschrift $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ erfolgen:

$$\frac{1}{2}(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(8 \quad 24)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = C,$$

$$(\xi \quad \eta)\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(32 \quad 16)\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 16\xi^2 + 4\eta^2 + 16\sqrt{2}\xi + 8\sqrt{2}\eta = C$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich übrigens

$$f(x,y) = 16\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{16}{2} + 4\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot 2 = 16\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2 - 16,$$

das einzige Minimum liegt mit dem Funktionswert -16 bei $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

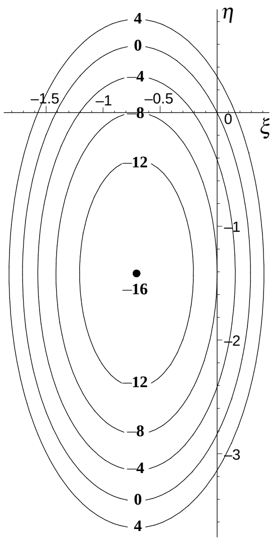
$$\implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \text{ wie bereits bekannt.}$$

Für die Niveaulinien $f(x,y) = C$ ergibt sich $16\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2 = C + 16,$

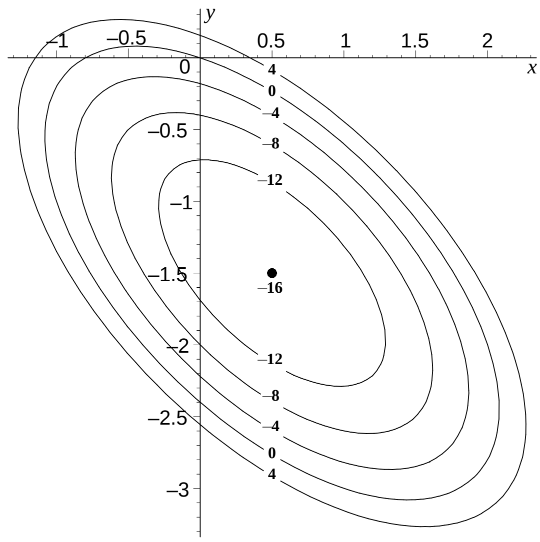
$$\frac{\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{C+16}}{4}\right)^2} + \frac{\left(\eta + \sqrt{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{C+16}}{2}\right)^2} = 1.$$

Niveaulinien gibt es nur für $C \geq -16$, es handelt sich im transformierten Koordinatensystem um Ellipsen mit den Halbachsen $\dfrac{\sqrt{C+16}}{4}$ und $\dfrac{\sqrt{C+16}}{2}$ um den Mittelpunkt $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$.

c) Da die Drehung durch Mukltiplikation mit der Matrix $\boldsymbol{V} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ realisiert wird, beträgt der Drehwinkel $45°$.



transformiertes System



Ausgangssystem

d) Nach b) gibt es Niveaulinien genau dann, wenn $C \geq -16$ gilt; also ist $\mathrm{WB}(f) = [-16, \infty)$.