Aufgabe 18.83

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x,y,z)=y^3+x^2+12y^2+z^2+12xy-240y+6z$!
b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

Lösung:

a) $\nabla f=\begin{pmatrix}2x+12y\\3y^2+24y+12x-240\\2z+6\end{pmatrix}=\vec{0}$ $\quad\begin{array}{l}2x+12y=0 \;\Rightarrow\; x=-6y\\ \qquad\qquad\Rightarrow\; 3y^2+24y-72y-240=0,\\ 2z+6=0 \;\Rightarrow\; z=-3\end{array}$

$$3y^2-48y-240=0,\ y^2-16y-80=0,\ y_{1/2}=8\pm\sqrt{64+80}=8\pm12=\begin{cases}20\\-4\end{cases},\ x_{1/2}=\begin{cases}-120\\24\end{cases}$$

Stationäre Punkte sind somit $(-120,20,-3)$ und $(24,-4,-3)$.

Für diese beiden stationären Punkte wird nun die hinreichende Extremwertbedingung untersucht:

$$\boldsymbol{H}_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2&12&0\\12&6y+24&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_f(-120,20,-3)=\begin{pmatrix}2&12&0\\12&144&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Hauptminoren $2>0$, $\begin{vmatrix}2&12\\12&144\end{vmatrix}=144>0$,

$\begin{vmatrix}2&12&0\\12&144&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&12\\12&144\end{vmatrix}=288>0$

alle Hauptminoren positiv, $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit, $f(-120,20,-3)=-6409$ lokales Minimum

$$\boldsymbol{H}_f(24,-4,-3)=\begin{pmatrix}2&12&0\\12&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Hauptminoren $2>0$, $\begin{vmatrix}2&12\\12&0\end{vmatrix}=-144<0$, gerader Hauptminor neg., $\boldsymbol{H}_f$ indefinit, kein Extr.

b) $f(x0,y,0)=y^3+12y^2-240y\begin{cases}\to-\infty, & y\to-\infty\\ \to\infty, & y\to\infty\end{cases}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ Es gibt keine globalen Extrema.