Aufgabe 18.80

Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ über dem Gebiet $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$!

Lösung:

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\cos x+\cos(x+y)\\ \cos y+\cos(x+y)\end{pmatrix}=\vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \cos x=\cos(x+y)=\cos y$$

Wegen $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ folgt $x=y$ und damit $\cos x=-\cos 2x=-(2\cos^2 x-1)=1-2\cos^2 x$.

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0,\ \ \cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}=0,\ \ (\cos x)_{1/2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{8}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}=\begin{cases}1/2\\ -1\end{cases}$$

Wegen $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ bleibt nur $\cos x=\frac{1}{2}$ und damit $x=\frac{\pi}{3}$, so dass $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ der einzige stationäre Punkt ist.

$$\boldsymbol{H}_f=\begin{pmatrix}-\sin x-\sin(x+y) & -\sin(x+y)\\ -\sin(x+y) & -\sin y-\sin(x+y)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ -\sin\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\det\boldsymbol{H}_f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=3-\frac{3}{4}>0 \quad\Longrightarrow\quad \text{Extremum}$$

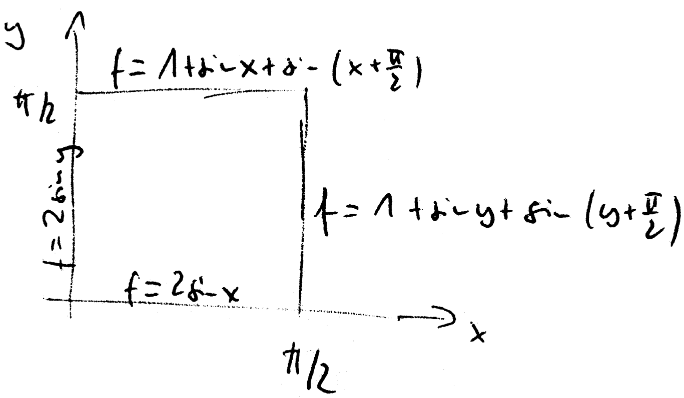
$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0 \quad\Longrightarrow\quad f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2{,}598 \text{ ist lokales Maximum.}$$

Im Inneren des Definitionsbereichs gibt es nur das eine lokale Maximum und kein lokales Minimum.

Zur Bestimmung er globalen Extrema muss noch das Verhalten auf den Rändern untersucht werden.

Wegen $0<\sin x,\sin y,\sin(x+y)$ für $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ liegt das globale Minimum bei $x=y=0$: $f(0,0)=0$.

Es verbleibt die Bestimmung des größten Funktionswertes auf den Rändern.



Auf den Koordinatenachsen gilt $0\le f(x,0)=2\sin x\le 2$ und $0\le f(0,y)=2\sin y\le 2$, so dass die Funktionswerte dort kleiner als der im lokalen Maximum im Inneren vorliegende Wert $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ sind.

Auf dem oberen Rand gilt $f(x,\frac{\pi}{2})=1+\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{2})=1+\sin x+\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=1+\sin x+\cos x$.

Zur Untersuchung der Funktionswerte auf dem oberen Rand betrachten wir deshalb die Funktion $g(x) = 1 + \sin x + \cos x$:

$g'(x) = \cos x - \sin x = 0$ für $\sin x = \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$,

$g''(x) = -\sin x - \cos x < 0$ für $x = \dfrac{\pi}{4} \implies$ dort Maximum.

Wegen $f(0, \frac{\pi}{2}) = g(0) = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = 2$ und $f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{4}) = 1 + \sqrt{2} < \frac{3}{2}\sqrt{3}$ sind die Funktionswerte $f(x, \frac{\pi}{2})$ auf dem oberen Rand immer kleiner als der im lokalen Maximum im Inneren vorliegende Wert $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Aus Symmetriegründen gilt das Gleiche auch für die Funktionswerte $f(\frac{\pi}{2}, y)$ auf dem rechten Rand.

Somit ist die Funktion auf dem gesamten Rand kleiner als in dem im Inneren liegenden lokalen Maximum. Folglich ist Letzteres das globale Maximum: $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.