Aufgabe 18.79

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$!

Lösung:

$$\begin{array}{l} f_x=4x^3-4x+4y=0 \\ f_y=4y^3+4x-4y=0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x^3-x+y=0 \\ y^3+x-y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Durch Addition folgt} \\ x^3+y^3=0 \Rightarrow y^3=-x^3 \Rightarrow y=-x \end{array} .$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $x^3-2x=x(x^2-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pm\sqrt{2}.$

Stationäre Punkte: $(x_1,y_1)=(0,0),\ (x_2,y_2)=(\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ (x_3,y_3)=(-\sqrt{2},\sqrt{2}),$

$$\boldsymbol{H}_f=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix},$$

für (x_2,y_2): $\det\boldsymbol{H}_f=20\cdot 20-4\cdot 4=384>0 \Rightarrow$ Extremum,
$f_{xx}=20>0 \Rightarrow$ lok. Min. $f=-8,$

für (x_3,y_3): $\det\boldsymbol{H}_f=20\cdot 20-4\cdot 4=384>0 \Rightarrow$ Extremum,
$f_{xx}=20>0 \Rightarrow$ lok. Min. $f=-8,$

für (x_1,y_1): $\det H_f=(-4)\cdot(-4)-4\cdot 4=0$, d.h. so nicht entscheidbar.

Nähert man sich dem Punkt $(x_1,y_1)=(0,0)$ mit $f(0,0)=0$ längs der x-Achse ($y=0$), so gilt $f(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0,$
nähert man sich diesem Punkt hingegen längs der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ($y=x$), so gilt $f(x,x)=2x^4>0,$
also liegen in der Umgebung von $(x_1,y_1)=(0,0)$ sowohl Punkte mit negativem als auch Punkte mit positivem Funktionswert. Somit liegt an dieser Stelle kein lokales Extremum vor.

Für große x und/oder y dominieren die vierten Potenzen, so dass f positiv, aber nicht negativ beliebig groß werden kann. Da f damit nach unten beschränkt ist, sind die Punkte mit $f=-8$ globale Minima, denn sonst würde es ein weiteres lokales Minimum geben. Globales Maximum gibt es keines.