Aufgabe 18.76

Für $x>0, y>0$ sei die Funktion $f(x,y)=x-y+\ln\frac{y}{x}$ definiert.

a) Hat die Funktion globale oder lokale Extrema bzw. Sattelpunkte?
b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(\mathrm{e},1)$ an $z=f(x,y)$!
c) Sei $\vec{a}$ ein Vektor in gegenüber der positiven x-Achse im positiven Sinne um 60^{o} gedrehter Richtung. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e},1)$!
d) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ ausgehend von $(x,y)=(\mathrm{e},1)$ am stärksten?

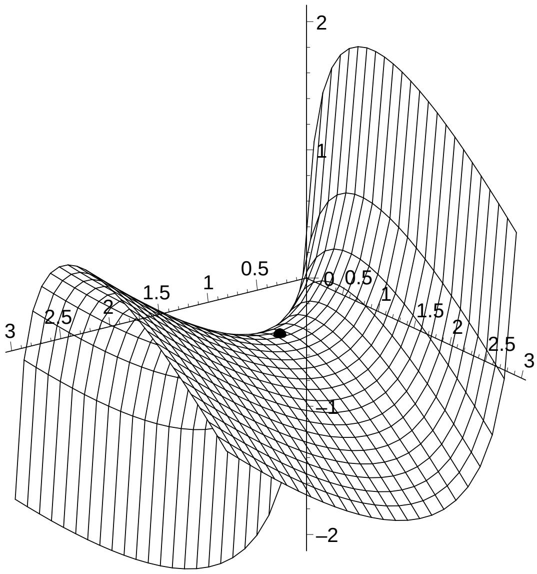
Lösung:

a) Es gilt $f(x,y)=x-y+\ln y-\ln x$. Hält man z.B. y mit 1 fest, so gilt $f(x,1)=x-1-\ln x$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x,1)=+\infty$, hält man x mit 1 fest, so gilt $f(1,y)=1-y+\ln y$ und $\lim\limits_{y\to 0} f(1,y)=-\infty$. $f(x,y)$ ist also beidseitig unbeschränkt, so dass keine globalen Extrema existieren.

$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{x}\\ -1+\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gilt offensichtlich nur für $(x,y)=(1,1)$. Es gibt also nur diesen einzigen stationären Punkt.

$\boldsymbol{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{x^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{H}_f(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Wegen $\det \boldsymbol{H}_f(1,1)=-1$ ist $f(1,1)=0$ ein Sattelpunkt, lokale Extrema existieren nicht.



b) $f(\mathrm{e},1)=\mathrm{e}-1+\ln\frac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-2$, $\nabla f(\mathrm{e},1)=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{\mathrm{e}}\\ 0\end{pmatrix}$

$z=\mathrm{e}-2+\begin{pmatrix}x-\mathrm{e} & y-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{\mathrm{e}}\\ 0\end{pmatrix}=\mathrm{e}-2+(x-\mathrm{e})(1-\frac{1}{\mathrm{e}})=(1-\frac{1}{\mathrm{e}})x-1$

Die Gleichung der Tangentialebene lautet also $\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)x-z=1$.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\|\vec{a}\| = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e},1) = \nabla f(\mathrm{e},1)\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\mathrm{e}}) \approx 0.316$$

d) Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ein beliebiger normierter Richtungsvektor, d.h. $\|\vec{a}\|=1$, ${a_1}^2+{a_2}^2=1$. Dann gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\mathrm{e},1) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\mathrm{e}} \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1(1-\frac{1}{\mathrm{e}})$. Wegen ${a_1}^2+{a_2}^2=1$ ist $-1\leq a_1\leq 1$. Da außerdem $1-\frac{1}{\mathrm{e}}>0$ gilt, ist die Richtungsableitung und damit das Wachstum von $f(x,y)$ für $a_1=1$ am größten. Wegen ${a_1}^2+{a_2}^2=1$ ist dann $a_2=0$, also $\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Funktion wächst also ausgehend von $(x,y)=(\mathrm{e},1)$ in Richtung der positiven x–Achse am stärksten.