Aufgabe 18.74

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = (x^3 + 3x^2 + 1)\cosh y$.

a) Hat die Funktion globale Extrema?
b) Ermitteln Sie die relativen Extrema und Sattelpunkte!
c) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ für den Entwicklungspunkt $(0,0)$ bis zu den quadratischen Gliedern an!

Lösung:

a) Hält man $y = 0$ fest, so gilt wegen $\cosh 0 = 1$ $\quad f(x,0) = x^3 + 3x^2 + 1$ mit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$, so dass $f(x,y)$ keine globalen Extrema haben kann.

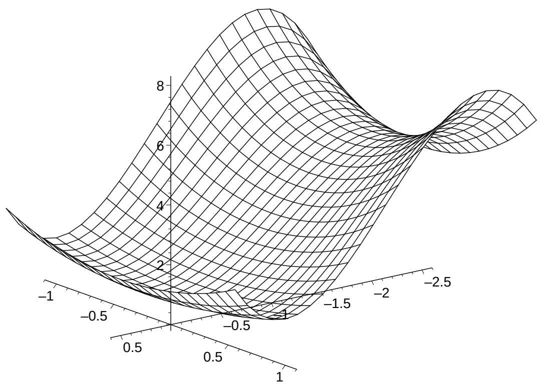
b) $f_x = (3x^2 + 6x)\cosh y = x(3x+6)\cosh y = 0, \quad f_y = (x^3 + 3x^2 + 1)\sinh y = 0$

Wegen $\cosh y \geq 1$ ist $f_x = 0$ äquivalent zu $x = 0$ oder $x = -2$. Da für diese beiden x die Beziehung $x^3 + 3x^2 + 1 \neq 0$ gilt, muss wegen $f_y = 0$ $\quad \sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ gelten. Also sind $(0,0)$ und $(-2,0)$ die einzigen stationären Punkte.

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} (6x+6)\cosh y & (3x^2+6x)\sinh y \\ (3x^2+6x)\sinh y & (x^3+3x^2+1)\cosh y \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \boldsymbol{H}_f = 6 > 0 \Rightarrow \text{Extr.}, \quad f_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow f(0,0) = 1 \text{ lok. Min.},$$

$$\boldsymbol{H}_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det \boldsymbol{H}_f = -30 < 0 \Rightarrow f(-2,0) = 5 \text{ ist Sattelpunkt}$$



c) $$f(x,y) = f(0,0) + (x \quad y)\,\nabla f(0,0) + \frac{1}{2}(x \quad y)\,\boldsymbol{H}_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R_2(x,y) =$$

$$1 + (x \quad y)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x \quad y)\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R_2(x,y) = 1 + 3x^2 + \frac{1}{2}y^2 + R_2(x,y)$$