Aufgabe 18.71

Sei $f(x,y) = 10 - 2x^2 - 3y^2 + 4xy - 4x + 8y$.

a) Entwickeln Sie $f(x,y)$ an der Stelle (x_0,y_0) in eine Taylorreihe!
b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)$ auf Extremwerte!
c) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ am Extremum und die Taylorentwicklung von $f(x,y)$ am Koordiantenursprung an!
d) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebenen an die Fläche $z = f(x,y)$ im Extremum sowie im Koordinatenursprung an!

Lösung:

a) Taylorentwicklung: $f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\text{Tangentialebene}} + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + \ldots$

$$f(x,y)=10-2x^2-3y^2+4xy-4x+8y,\quad \nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-4x+4y-4\\-6y+4x+8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-6\end{pmatrix},$$

alle höheren Ableitungen gleich 0 $\implies$ Taylorentwicklung endet nach dem quadratischen Glied ($f(x,y)$ ist ja auch eine quadratische Funktion!)

$$\begin{aligned}f(x,y)&=10-2x_0^2-3y_0^2+4x_0y_0-4x_0+8y_0+\begin{pmatrix}-4x_0+4y_0-4\\4x_0-6y_0+8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\\&\quad+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-x_0 & y-y_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&4\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\\&=10-2x_0^2-3y_0^2+4x_0y_0-4x_0+8y_0+(-4x_0+4y_0-4)(x-x_0)+(4x_0-6y_0+8)(y-y_0)\\&\quad-2(x-x_0)^2+4(x-x_0)(y-y_0)-3(y-y_0)^2\end{aligned}$$

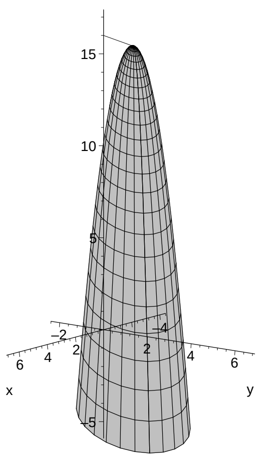
b) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-4x+4y-4\\4x-6y+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$-4x+4y-4=0 \mid +$
$4x-6y+8=0 \mid + \quad -2y+4=0,\ y=2,\ x=y-1=1$

Also ist $(1,2)$ der einzige stationäre (extremwertverdächtige) Punkt.

$\boldsymbol{H}_f(1,2)=\begin{pmatrix}-4&4\\4&-6\end{pmatrix}$,

$\det\boldsymbol{H}_f=24-16=8>0 \implies$ Extremwert,
$f_{xx}=-4<0 \implies \boldsymbol{H}_f$ negativ definit, also Maximum $f(1,2)=16$



c) Entwicklung im Extremwert $(x_0,y_0)=(1,2)$:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\underbrace{16+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}}_{\text{waager. Tang.ebene}}+\underbrace{\begin{pmatrix}x-1 & y-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&4\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}}_{<0\text{ für }(x,y)\neq(1,2),\text{ da }\boldsymbol{H}_f\text{ neg. definit}}\\&=16\underbrace{-2(x-1)^2+4(x-1)(y-2)-3(y+2)^2}_{<0}\end{aligned}$$

Entwicklung im Koordinatenursprung $(x_0,y_0)=(0,0)$:

$f(x,y)=10+\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&4\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=10-4x+8y-2x^2+4xy-3y^2$, wie nicht anders zu erwarten ergibt sich die gegebene Darstellung der zu behandelnden Funktion

d) Tangentialebene: Taylorentwicklung bis zum linearen Glied, d.h. $z = f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$
(analog in Ebene Tangente an Kurve $y = f(x)$: Tangente: $y = f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$)
Tangentialebene im Extremwert $(x_0, y_0) = (1, 2)$: $z = 16$ (parallel zu x-y-Ebene)
Tangentialebene im Koordinatenursprung $(x_0, y_0) = (0, 0)$: $z = 10 - 4x + 8y$, d.h. $4x - 8y + z = 10$