Aufgabe 18.70

Gegeben sei die Funktion $f(x,y)=(x^3+2x^2+1)(y^2+1),\ x,y\in\mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen!
b) Ermitteln Sie die Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion!
c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion an!

Lösung:

a) $f_x=(3x^2+4x)\,(y^2+1)$
$f_y=(x^3+2x^2+1)\,2y$

$f_{xx}=(6x+4)\,(y^2+1)$
$f_{xy}=(3x^2+4x)\,2y \quad =f_{yx}$
$f_{yy}=2\,(x^3+2x^2+1)$

b) $\nabla f=\begin{pmatrix}(3x^2+4x)\,(y^2+1)\\(x^3+2x^2+1)\,2y\end{pmatrix}=\vec{0}$

$$x(3x+4)(y^2+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\ \vee\ x=-\frac{4}{3}$$
$$(x^3+2x^2+1)2y=0 \quad\Rightarrow\quad x^3+2x^2+1=0\ \vee\ y=0$$

Für $x=0$ ist $x^3+2x^2+1=1\neq 0$, für $x=-\dfrac{4}{3}$ ist $x^3+2x^2+1=-\frac{64}{27}+\frac{32}{9}+1=\frac{-64+96+27}{27}=\frac{59}{27}\neq 0$,
so dass in beiden Fällen $y=0$ sein muss.

Also sind $(0,0)$ und $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$ die beiden einzigen stationären Punkte.

$$\boldsymbol{H}_f=\begin{pmatrix}(6x+4)\,(y^2+1) & (3x^2+4x)\,2y\\(3x^2+4x)\,2y & 2\,(x^3+2x^2+1)\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}_f(0,0)=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\det\boldsymbol{H}_f=8>0 \Longrightarrow$ Extremum, $f_{xx}=4 \Longrightarrow$ lok. Minimum in $f(0,0)=1$

$\boldsymbol{H}_f\left(-\dfrac{4}{3},0\right)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&\frac{118}{27}\end{pmatrix}$, $\det\boldsymbol{H}_f=-\dfrac{472}{27}<0 \Longrightarrow$ kein Extr., Sattelpunkt in $f\left(-\dfrac{4}{3},0\right)=\dfrac{59}{27}$

c) $f(x,0)=x^3+2x^2+1\begin{cases}\longrightarrow -\infty, & x\to-\infty\\\longrightarrow \infty, & x\to\infty\end{cases}$, also ist der Wertebereich $\mathbb{R}$.