Aufgabe 18.68

a) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2y - 6xy + 9y + y\ln y$!
b) Handelt es sich um globale Extremwerte?

Lösung:

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy-6y \\ x^2-6x+9+\ln y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y(x-3) \\ x^2-6x+10+\ln y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2y(x-3)=0 \implies y=0$ scheidet aus, da ln dort nicht definiert bzw. $\underline{x=3}$

$x^2-6x+10+\ln y = 9-18+10+\ln y = 1+\ln y = 0, \quad \ln y = -1, \quad y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$(3, 1/\mathrm{e})$ ist einziger stationärer Punkt.

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-6 \\ 2x-6 & 1/y \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}_f(3,1/\mathrm{e}) = \begin{pmatrix} 2/\mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = 2 > 0 \implies$ Extremwert, $f_{xx} = 2/\mathrm{e} > 0 \implies$
lokales Minimum bei $f(3,1/\mathrm{e}) = (9-18+9-1)/\mathrm{e} = -1/\mathrm{e}$

b) $f(x,y) = (x^2-6x+9)y + y\ln y = \underbrace{(x-3)^2}_{\geq 0}\underbrace{y}_{>0 \text{ damit ln definiert}} + y\ln y \geq y\ln y$

$$\lim_{y\to 0} y\ln y = \lim_{y\to 0}\frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0}(-y) = 0$$

Für $g(y)=y\ln y$ gilt $g'(y) = \ln y + 1 \begin{cases} <0, & y<1/\mathrm{e}: \text{ monoton fallend} \\ =0, & y=1/\mathrm{e}: \\ >0, & y>1/\mathrm{e}: \text{ monoton wachsend} \end{cases} \longrightarrow$ Minimum.

Also hat die Funktion $g(y)=y\ln y$ an der Stelle $y=1/\mathrm{e}$ ein globales Minimum und es gilt $g(y) = y\ln y \geq g(1/\mathrm{e}) = -1/\mathrm{e}$.

Folglich gilt immer $f(x,y) \geq -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, so dass das ermittelte Minimum bei $\left(3, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ globales Minimum ist.

(Nach oben ist die Funktion offensichtlich unbeschränkt – man muss nur x und y beliebig wachsen lassen –, so dass es kein globales Maximum gibt.)