Aufgabe 18.66

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)=12xy-x^3y+16\ln y-32y$ auf Extremwerte!

Lösung:

$$\nabla f=\begin{pmatrix} 12y-3x^2y \\ 12x-x^3+\frac{16}{y}-32 \end{pmatrix}=\vec{0} \qquad 3y(4-x^2)=0 \implies y=0 \vee x^2=4$$

$y=0$ scheidet aus, da dort der Logarithmus nicht definiert ist, so dass für stationäre Punkte nur $x^2=4,\ x=\pm 2$ verbleibt Einsetzen in die 2. Gleichung ergibt dann

für $x=2$: $\quad 24-8+\dfrac{16}{y}-32=\dfrac{16}{y}-16=0,\ y=1$ und

für $x=-2$: $\quad -24+8+\dfrac{16}{y}-32=\dfrac{16}{y}-48=0,\ y=\dfrac{1}{3}$.

Stationäre Punkte sind also $(2,1)$ und $(-2,1/3)$.

$$\boldsymbol{H}_f=\begin{pmatrix} -6xy & 12-3x^2 \\ 12-3x^2 & -\frac{16}{y^2} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}_f(2,1)=\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f=192>0 \Rightarrow$ Extremum, $f_{xx}=-12<0 \Rightarrow$ Maximum bei $f(2,1)=-16$

$\boldsymbol{H}_f\left(-2,\dfrac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -144 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f=-576<0 \Rightarrow$ kein Extremum, Sattelpunkt bei $f(-2,1/3)=-16-16\ln 3$