Aufgabe 18.65

a) Ermitteln Sie die lokalen Extremstellen und Extremwerte der Funktion
$f(x,y) = x^3y - 3xy + y^2 + 1,\quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$!

b) Handelt es sich bei den lokalen Extrema um globale Extrema?

Lösung:

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2y - 3y \\ x^3 - 3x + 2y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$3y(x^2-1)=0 \implies \begin{array}{ccc} y=0 & \vee & x=\pm 1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x^3-3x=x(x^2-3)=0 & & 2y=3x-x^3=\pm 2 \\ x=0 \vee x=\pm\sqrt{3} & & y=\pm 1 \end{array}$$

Stationäre Punkte sind also $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$, $(1,1)$ und $(-1,-1)$.

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2-3 \\ 3x^2-3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = -9 < 0 \Rightarrow$ kein Extremum, Sattelpunkt bei $f(0,0)=1$

$\boldsymbol{H}_f(\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = -36 < 0 \Rightarrow$ kein Extremum, Sattelpunkt bei $f(\sqrt{3},0)=1$

$\boldsymbol{H}_f(-\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = -36 < 0 \Rightarrow$ kein Extremum, Sattelpunkt bei $f(-\sqrt{3},0)=1$

$\boldsymbol{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = 12 > 0 \Rightarrow$ Extremum, $f_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow$ Min. bei $f(1,1)=0$

$\boldsymbol{H}_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = 12 > 0 \Rightarrow$ Extremum, $f_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow$ Min. bei $f(-1,-1)=0$

b) $f(x,1) = x^3 - 3x + 2 \begin{cases} \longrightarrow \infty, & x \to \infty \\ \longrightarrow -\infty, & x \to -\infty \end{cases} \implies f(x,y)$ unbeschränkt, keine globalen Extrema