Aufgabe 18.61

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = (x-6)^2 + (x+2)y^2 + 10$ auf stationäre Punkte und Extremwerte!

Lösung:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-6)+y^2 \\ 2(x+2)y \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{array}{l} 2(x-6)+y^2 = 0 \\ 2(x+2)y = 0 \longrightarrow x=-2 \ \text{ oder } \ y=0 \end{array}$$

Im Falle $x=-2$ lautet die obere Gleichung $-16+y^2=0$, so dass sich $y=\pm 4$ ergibt.

Im Falle $y=0$ lautet die obere Gleichung $2(x-6)=0$, so dass sich $x=6$ ergibt.

Also gibt es die drei stationären Punkte $(-2,4)$, $(-2,-4)$ und $(6,0)$.

$$\boldsymbol{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2(x+2) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_f(-2,4) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \ \det \boldsymbol{H}_f(-2,4) = -64 < 0, \ \text{bei } (-2,4) \text{ Sattelpunkt}$$

$$\boldsymbol{H}_f(-2,-4) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \ \det \boldsymbol{H}_f(-2,-4) = -64 < 0, \ \text{bei } (-2,-4) \text{ Sattelpunkt}$$

$$\boldsymbol{H}_f(6,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \ \det \boldsymbol{H}_f(6,0) = 32 > 0, \ \text{bei } (6,0) \text{ Extremum}, \ f_{xx} = 2 > 0, \text{ also Minimum}$$

Somit ist das Minimum an der Stelle $(x,y)=(6,0)$ der einzige Extremwert der Funktion.