Aufgabe 18.59

Sei $f(x,y) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 3y^2 + 5)$.

a) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an $z = f(x,y)$ in den Punkten $(0,0,10)$ und $(0,1,6)$!
b) Ermitteln Sie die lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$!
c) Hat die Funktion $f(x,y)$ globale Extrema?

Lösung:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 3y^2 + 5), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 6y)$

Tangentialebene $z = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$

in $(0,0,10)$: $z = 10 + 0(x-0) + 0(y-0) = 10$, $\underline{\underline{z = 10}}$ (zur x–y–Ebene parallele Ebene)

in $(0,1,6)$: $z = 6 + 0(x-0) - 6(y-1) = 6 - 6y + 6$, $\underline{\underline{6y + z = 12}}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 3y^2 + 5) = 0, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 6y) = 0$

Aus Letzterem folgt wegen $\mathrm{e}^x > 0$, $\mathrm{e}^{-x} > 0 \Rightarrow (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) > 0 \quad (3y^2 - 6y) = 3y(y-2) = 0$ und damit $y = 0$ oder $y = 2$.

Einsetzen in die erste Beziehung ergibt für $y = 0 \quad (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})5 = 0$ und daher $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}$, $x = 0$, für $y = 2 \quad (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})1 = 0$ und daher auch $x = 0$.

Stationäre Punkte sind damit $(0,0)$ und $(0,2)$. (Der erste stationäre Punkt war schon aus a) wegen der waagerechten Tangentialebene bekannt.)

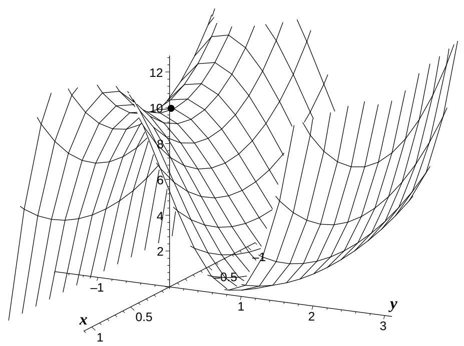
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 3y^2 + 5), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 6y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(6y - 6)$

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 3y^2 + 5) & (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 6y) \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 6y) & (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(6y - 6) \end{pmatrix}$$

$\det\left(\boldsymbol{H}_f(0,0)\right) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -120 < 0 \Rightarrow$ in $(0,0)$ kein Extremum (Sattelpunkt)

$\det\left(\boldsymbol{H}_f(0,2)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 24 > 0 \Rightarrow$ in $(0,2)$ Extremum, $f_{xx}(0,2) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum



c) Betrachtet man z.B. die Funktion $f(x,y)$ nur über der y–Achse ($x=0$), so gilt $f(0,y)=2\,(y^3-3y^2+5)$. Dies geht für $y\to+\infty$ gegen $+\infty$ und für $y\to-\infty$ gegen $-\infty$. $f(x,y)$ ist also in beide Richtungen unbeschränkt, damit gibt es keine globalen Extrema.