Aufgabe 18.55

Durch die Gleichung $F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 2 = 0$ wird implizit eine „Astroide“ beschrieben.

a) Zeigen Sie, dass sich diese Astroide durch $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = 2^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \cos^3\varphi \\ \sin^3\varphi \end{pmatrix}$ auch als Vektorfunktion beschreiben lässt!

b) Skizzieren Sie die Kurve!

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Astroide im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) durch Differenziation der Vektorfunktion $\vec{x}(\varphi)$,

d) durch implizite Differenziation von $F(x,y)=0$,

e) durch explizite Auflösung von $F(x,y)=0$ und anschließende Differenziation!

Lösung:

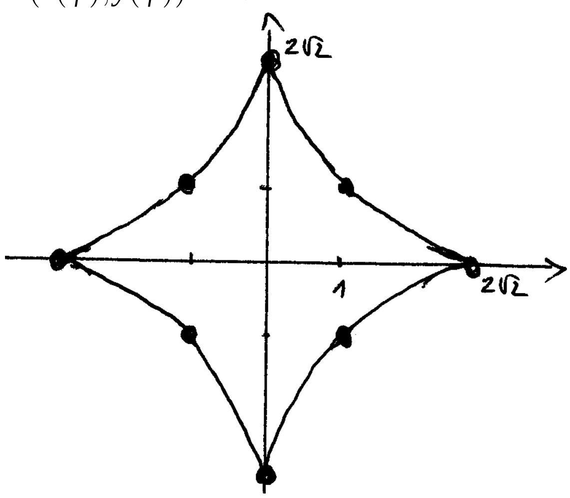
a) Einseten der Parameterdarstellung ergibt

$$(x(\varphi))^{2/3} + (y(\varphi))^{2/3} - 2 = 2^{\frac{3}{2}\frac{2}{3}}(\cos^3\varphi)^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{3}{2}\frac{2}{3}}(\sin^3\varphi)^{\frac{2}{3}} - 2 = 2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi - 2 = 0,$$

also gilt für die Punkte von $\vec{x}(\varphi)$ die Beziehung $F(x(\varphi),y(\varphi)) = 0$.

b) $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \vec{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

φ	$x(\varphi)$	$y(\varphi)$
0	$2\sqrt{2}$	0
$\pi/4$	1	1
$\pi/2$	0	$2\sqrt{2}$
$3\pi/4$	-1	1
π	$-2\sqrt{2}$	0
$5\pi/4$	-1	-1
$3\pi/2$	0	$-2\sqrt{2}$
$7\pi/4$	1	-1



c) Richtung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(\varphi)$: $\vec{x}\,'(\varphi) = \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2\sqrt{2}\cos^2\varphi(-\sin\varphi) \\ 3\cdot 2\sqrt{2}\sin^2\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\vec{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Tangentenrichtung $\vec{x}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tangente $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 1 - t \\ y = 1 + t \end{matrix} \quad x + y = 2, \quad y = -x + 2$

d) Anstieg der Tangente $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Implizite Differenziation (siehe z.B. Aufgabe 18.49):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} - \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -1 \text{ für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangente $y = -x + n$, $\quad 1 = -1 + n \;\rightarrow\; n = 2$, $\quad y = -x + 2$

e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$, $\quad y^{\frac{2}{3}} = 2 - x^{\frac{2}{3}}$, $\quad y = \left(2 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, da $y > 0$ in Umgebung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y'(x) = \frac{3}{2}\left(2 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}$, $\quad y'(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1}\left(-\frac{2}{3}\right)1 = -1 \;\rightarrow\; y = -x + 2$