Aufgabe 18.54

Gegeben sei die Funktion $F(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2-3$.

a) Gibt es in der Umgebung des Punktes $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=(1,2)$ eine eindeutig bestimmte Funktion φ mit $x_2=\varphi(x_1)$, so dass $F(x_1,\varphi(x_1))=0$?
b) Wie muss die Variable x_2 in einer Umgebung des Punktes $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=(1,2)$ auf kleine Änderungen der Variablen x_1 reagieren, damit die Gleichung $F(x_1,x_2)=0$ noch näherungsweise erfüllt bleibt?
c) Stellen Sie die Lösungsmenge von $F(x_1,x_2)=0$ in der Umgebung von $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=(1,2)$ grafisch dar! Benutzen Sie dafür Taylorpolynome ersten und zweiten Grades!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Lösung:

a) **Satz über die implizite Funktion:**
Die Funktion $F(x_1,x_2)$ sei in der Umgebung eines Punktes $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ definiert und stetig partiell differenzierbar und es sei $F(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=0$. Ist dann $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\neq 0$, so wird in der Umgebung von $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ durch die Beziehung $F(x_1,x_2)=0$ (impliziter Zusammenhang zwischen x_1 und x_2) eine Funktion $x_2=\varphi(x_1)$ (explizite Darstellung) definiert. Die Funktion $\varphi(x_1)$ ist differenzierbar und es gilt $\boxed{\varphi'(\overline{x}_1)=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}(\overline{x}_1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}}$ (implizite Differenziation).

(Das heißt nicht, dass sich die Funktion $\varphi(x_1)$ ohne weiteres angeben lässt. Ihre Existenz ist aber gesichert. Besonders vorteilhaft ist, dass sich ihre Ableitung berechnen lässt, ohne die Funktion selbst explizit zu ermitteln.)

Die in der Aufgabenstellung gegebene Funktion $F(x_1,x_2)$ ist sogor über dem gesamten $\mathbb{R}^2$ definiert und stetig partiell differenzierbar. Im Punkt $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=(1,2)$ gilt $F(1,2)=0$. Weiterhin gilt $F_{x_2}=3x_2^2-3x_1$ und damit $F_{x_2}(1,2)=9\neq 0$. Folglich ist in der Umgebung des Punktes $(1,2)$ durch die implizite Vorschrift $F(x_1,x_2)=0$ eine explizite Funktion $x_2=\varphi(x_1)$ definiert.

b) $\varphi'(x_1)=-\frac{F_{x_1}}{F_{x_2}}=-\frac{3x_1^2-3x_2}{3x_2^2-3x_1}=\frac{x_1^2-x_2}{x_1-x_2^2}$, $\quad\varphi'(1)=\frac{1^2-2}{1-2^2}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

In der Umgebung von $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)=(1,2)$ kann die Änderung von x_2 in Abhängigkeit von der von x_1 durch das Differenzial angenähert werden: $\Delta x_2\approx \mathrm{d}x_2=\varphi'(x_1)\Delta x_1=\frac{1}{3}\Delta x_1$.

Ändert man also x_1 von $\overline{x}_1=1$ aus ein wenig um Δx_1, so muss x_2 von $\overline{x}_2=2$ aus um etwa $\frac{1}{3}\Delta x_1$ geändert werden, damit die Beziehung $F(x_1,x_2)=0$ näherungsweise erhalten bleibt.

c) Mithilfe der Ableitung von $\varphi(x_1)$ lässt sich die Tangente an die Kurve $F(x_1,x_2)=0$ im Punkt $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ bestimmen. Dabei handelt es sich um die Taylorentwicklung bis zum linearen Glied.

Für die gegebene Kurve lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $(1,2)$:
$T_1(x_1)=2-\frac{1}{3}(x_1-1)=\frac{1}{3}x_1+\frac{5}{3}$.

Analog zur ersten kann man auch die zweite Ableitung implizit ermitteln:

$$F(x_1, \varphi(x_1)) \equiv 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}F(x_1, \varphi(x_1)) = F_{x_1} + F_{x_2}\varphi'(x_1) = 0, \quad \boxed{\varphi'(x_1) = -\frac{F_{x_1}}{F_{x_2}}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_1^2}F(x_1, \varphi(x_1)) &= F_{x_1x_1} + F_{x_1x_2}\varphi'(x_1) + (F_{x_2x_1} + F_{x_2x_2}\varphi'(x_1))\varphi'(x_1) + F_{x_2}\varphi''(x_1) \\ &= F_{x_1x_1} + 2F_{x_1x_2}\varphi'(x_1) + F_{x_2x_2}(\varphi'(x_1))^2 + F_{x_2}\varphi''(x_1) = 0,\end{aligned}$$

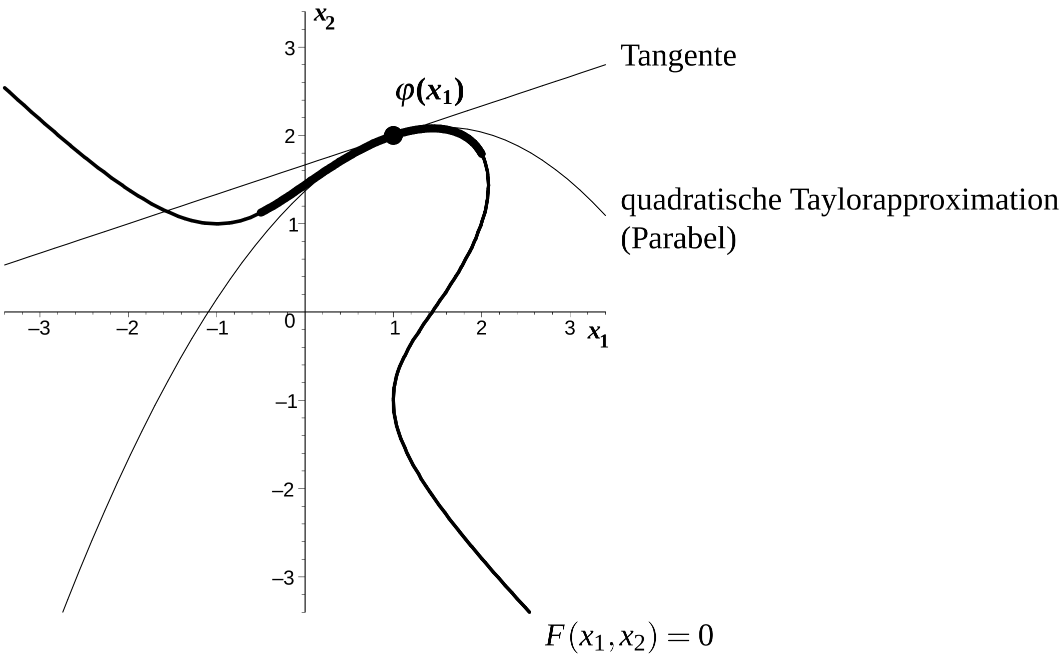
$$\boxed{\varphi''(x_1) = -\frac{F_{x_1x_1} + 2F_{x_1x_2}\varphi'(x) + F_{x_2x_2}(\varphi'(x_1))^2}{F_{x_2}} = \frac{-F_{x_1x_1}(F_{x_2})^2 + 2F_{x_1x_2}F_{x_1}F_{x_2} - F_{x_2x_2}(F_{x_1})^2}{(F_{x_2})^3}}$$

Konkret gilt $F_{x_1} = 3x_1^2 - 3x_2$, $F_{x_2} = 3x_2^2 - 3x_1$, $F_{x_1x_1} = 6x_1$, $F_{x_1x_2} = -3$, $F_{x_2x_2} = -6x_2$. An der Stelle $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1,2)$ ist dann $F_{x_1} = -3$, $F_{x_2} = 9$, $F_{x_1x_1} = 6$, $F_{x_1x_2} = -3$, $F_{x_2x_2} = -12$ und damit

$$\varphi''(1) = \frac{-6\cdot 9^2 + 2(-3)(-3)\cdot 9 - 12(-3)^2}{9^3} = \frac{-6\cdot 81 + 2\cdot 81 - 12\cdot 9}{9\cdot 81} = \frac{-4\cdot 9 - 12}{81} = -\frac{48}{81} = -\frac{16}{27}.$$

Die quadratische Taylorapproximation von $\varphi(x_1)$ an der Stelle $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1,2)$ ist somit

$$T_2(x_1) = 2 - \frac{1}{3}(x_1 - 1) - \frac{8}{27}(x_1 - 1)^2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{3} - \frac{8}{27}x_1^2 + \frac{16}{27}x_1 - \frac{8}{27} = \frac{1}{27}(-8x^2 + 25x + 37).$$



$F(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 - 3$, explizit auflösbar durch $x_2 = \varphi(x_1)$ in der Umgebung von $(1,2)$, mit Tangente und quadratischer Taylorapproximation im Punkt $(1,2)$