Aufgabe 18.53

Sei $h(x,y) = \sqrt{x^2-4x+4y^2+8y+17}$ die Höhe des Geländepunktes (x,y).

a) Wo ist der niedrigste Punkt des Geländes, welche Höhe hat er?

b) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Höhenlinie $h(x,y) = 5$ mit den Koordinatenachsen sowie mit den Geraden $x=2$ und $y=-1$!

c) Skizzieren Sie die Höhenlinie $h(x,y) = 5$!

d) Ermitteln Sie durch implizite Differenziation der Funktion $F(x,y)=(h(x,y))^2-25=0$ den Anstieg der Tangenten an die Höhenlinie $h(x,y) = 5$ in ihren Schnittpunkten mit der x–Achse!

Lösung:

a) $h(x,y)=\sqrt{x^2-4x+4y^2+8y+17}=\sqrt{(x-2)^2-4+4(y+1)^2-4+17}=\sqrt{(x-2)^2+4(y+1)^2+9}$ wird minimal für $(x-2)^2+4(y+1)^2 = 0 \iff \underline{\underline{(x,y) = (2,-1),\, h(2,-1) = 3.}}$

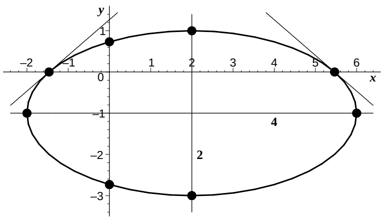
b) $h(x,y) = \sqrt{x^2-4x+4y^2+8y+17}=5 \Leftrightarrow (x-2)^2+4(y+1)^2+9=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+4(y+1)^2=16$

Schnitt mit x–Achse: $y=0$: $(x-2)^2+4=16,\ (x-2)^2=12,\ x=2\pm\sqrt{12}=2\pm2\sqrt{3}$,
Schnittpunkte $(2+2\sqrt{3},0)\approx(5.46,0),\ (2-2\sqrt{3},0)\approx(-1.46,0)$,

Schnitt mit y–Achse: $x=0$: $4+4(y+1)^2=16,\ (y+1)^2=3,\ y=-1\pm\sqrt{3}$,
Schnittpunkte $(0,-1+\sqrt{3})\approx(0,0.73),\ (0,-1-\sqrt{3},0)\approx(0,-2.73)$,

Schnitt mit $x=2$: $4(y+1)^2=16,\ (y+1)^2=4,\ y=-1\pm2$, Schnittpunkte $(2,1),(2,-3)$,

Schnitt mit $y=-1$: $(x-2)^2=16,\ x=2\pm4$, Schnittpunkte $(6,-1),(-2,-1)$

c) 

Es handelt sich um die achsenparallele Ellipse

$$\frac{(x-2)^2}{4^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$$

mit dem Mittelpunkt $(2,-1)$
und den Halbachsen 4 und 2.

d) $F(x,y)=(h(x,y))^2-25=(x-2)^2+4(y+1)^2+9-25=(x-2)^2+4(y+1)^2-16=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(x-2),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=8(y+1),\quad y'(x)=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=-\frac{1}{4}\,\frac{x-2}{y+1}$$

Schnittpunkte mit x–Achse (siehe b):

$(2+2\sqrt{3},0)$: Anstieg der Tangente $y'(2+2\sqrt{3})=-\frac{1}{4}\,\frac{2\sqrt{3}}{1}=\underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ (s. Abb. bei c))

$(2-2\sqrt{3},0)$: Anstieg der Tangente $y'(2-2\sqrt{3})=-\frac{1}{4}\,\frac{-2\sqrt{3}}{1}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}}$ (s. Abb. bei c))