Aufgabe 18.51

Betrachtet wird das Nullniveau der Funktion $f(x,y)=10x^2+12xy+10y^2+8x+24y$ (vgl. Aufgabe 18.84).

a) Zeigen Sie, dass in der Umgebung des Punktes $(x,y)=(0,-\frac{12}{5})$ durch das Nullniveau eine Funktion $y=\varphi(x)$ definiert wird!
b) Bestimmen Sie für diese Funktion die Ableitung $\varphi'(0)$ durch implizite Differenziation!
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente $T(x)$ im Punkt $(x,y)=(0,-\frac{12}{5})$ an die Niveaulinie!
d) Vergleichen Sie $T(0.1)$ und $\varphi(0.1)$!

Lösung:

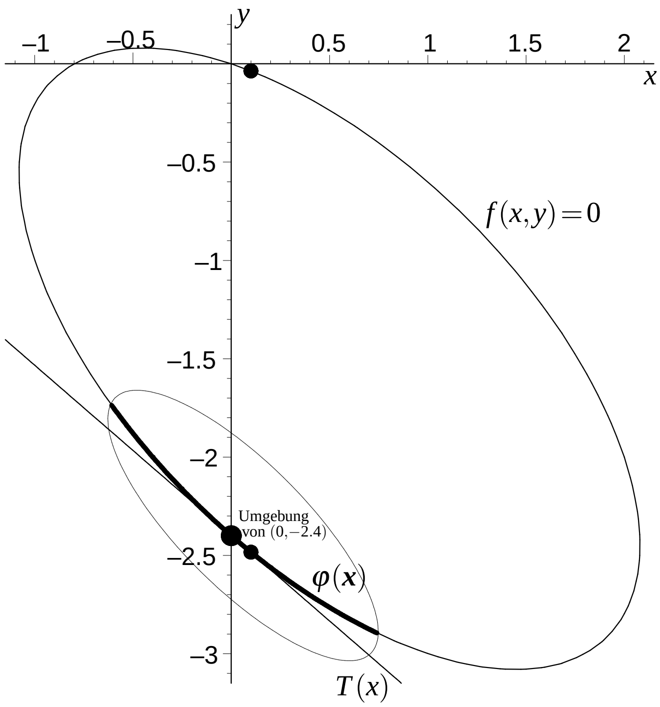
a) $f=10x^2+12xy+10y^2+8x+24y,\ f_x=20x+12y+8$ und $f_y=12x+20y+24$ sind offensichtlich stetig.

$$f\left(0,-\frac{12}{5}\right)=10\frac{144}{25}+24\left(-\frac{12}{5}\right)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-\frac{12}{5}\right)=20\left(-\frac{12}{5}\right)+24=-24\neq 0.$$

Also sind alle Voraussetzungen des Satzes über die implizite Funktion (vgl. Aufgabe 18.49) erfüllt. Somit wird durch $f(x,y)=0$ in der Umgebung des Punktes $(0,-\frac{12}{5})$ eine Funktion $y=\varphi(x)$ definiert.

b) $$\varphi'(x)=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{20x+12y+8}{12x+20y+24},\quad \varphi'(0)=-\frac{12\left(-\frac{12}{5}\right)+8}{20\left(-\frac{12}{5}\right)+24}=\underline{\underline{-\frac{13}{15}\approx -0.86667}}$$

c) $$T(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)(x-0)=\underline{\underline{-\frac{12}{5}-\frac{13}{15}x}}$$



Niveaulinie $f(x,y)=0$, eine Umgebung von $(0,-2.4)$,
$\varphi(x)$, $T(x)$ und Punkte $(0.1,\varphi(0.1))$ und $(0.1,y_1)$

d) $T(0.1) \approx \underline{\underline{-2.4866667}}$

$f(0.1,y) = 0.1+1.2y+10y^2+0.8+24y = 0,\ 10y^2+25.2y+0.9 = 0,\ y^2+2.52y+0.09 = 0,$

$$y_{1/2} = -1.26 \pm \sqrt{1.26^2 - 0.09} \approx \begin{cases} -0.0362353 \\ -2.4837647 \end{cases}$$

Die Lösung y_1 liegt zwar auf dem Nullniveau $f(x,y) = 0$, nicht aber in der Umgebung des Punktes $(0,-2.4)$, in der durch $f(x,y) = 0$ eine Funktion $y = \varphi(x)$ definiert ist. Also ist $\varphi(0.1) \approx \underline{\underline{-2.4837647}}$.