Aufgabe 18.49

In der Umgebung des Punktes $(1,2)$ werde durch $F(x,y)=x^5+y^4-4xy-11x+2=0$ eine Funktion $y=y(x)$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass durch $F(x,y)=0$ in der Umgebung des Punktes $(1,2)$ eine Funktion $y=y(x)$ definiert wird!
b) Berechnen Sie $y'(1)$!
c) Ermitteln Sie näherungsweise $y(1.1)$!

Lösung:

a) **Satz über die implizite Funktion:**
Die Funktion $F(x,y)$ sei in der Umgebung eines Punktes (x_0,y_0) definiert und stetig partiell differenzierbar und es sei $F(x_0,y_0)=0$. Ist dann $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, so wird in der Umgebung von (x_0,y_0) durch die Beziehung $F(x,y)=0$ (impliziter Zusammenhang zwischen x und y) eine Funktion $y=y(x)$ (explizite Darstellung) definiert. Die Funktion $y(x)$ ist differenzierbar und es gilt $\boxed{y'(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}}$ (implizite Differenziation).

(Das heißt nicht, dass sich die Funktion $y(x)$ ohne weiteres angeben lässt. Ihre Existenz ist aber gesichert. Besonders vorteilhaft ist, dass sich ihre Ableitung berechnen lässt, ohne die Funktion selbst explizit zu ermitteln.)

Für die gegebene Funktion $F(x,y)$ gilt in dem betrachteten Punkt $(x_0,y_0)=(1,2)$ tatsächlich $F(1,2)=1+16-8-11+2=0$.

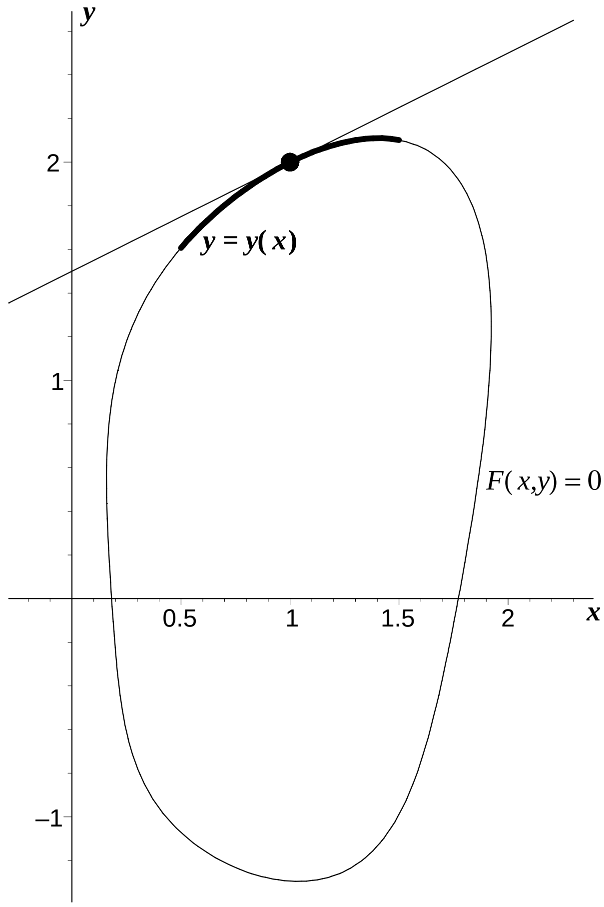
Ferner gilt $\dfrac{\partial F}{\partial x}=5x^4-4y-11$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y}=4y^3-4x$, die partiellen Ableitungen sind also stetig.

Weiterhin ist $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,2)=28\neq 0$. Folglich ist in der Umgebung des Punktes $(1,2)$ durch die implizite Vorschrift $F(x,y)=0$ eine explizite Funktion $y=y(x)$ definiert.

b) $y'(x)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{5x^4-4y-11}{4y^3-4x}$, $\quad (x_0,y_0)=(1,2):\quad y'(1)=-\dfrac{5-8-11}{32-4}=-\dfrac{-14}{28}=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

c) Taylorentwicklung bis zum linearen Glied (Tangente): $y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$

$y(1.1)\approx y(1)+y'(1)(1.1-1)=2+\dfrac{1}{2}0.1=\underline{\underline{2.05}}$ (Exakt gilt $y(1.1)=2.044938166.$)



Implizite Funktion $F(x,y) = x^5 + y^4 - 4xy - 11x + 2 = 0$
mit Tangente im Punkt $(1,2)$