Aufgabe 18.48

Lässt sich der implizit durch $F(x,y)=0$ definierte Zusammenhang von x und y explizit nach y als Funktion $y=y(x)$ auflösen, so gilt unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\,.$$

a) Begründen Sie diese Formel mit der Kettenregel!

b) Ein Zusammenhang zwischen den Größen x und y sei durch $h(x,y)=36+6x-x^2+10y-y^2=45$ beschrieben. Ermitteln Sie $y'(x)$ für $x=6$, $y=1$ durch implizite Differenziation sowie durch explizite Auflösung nach y und anschließende Differenziation!

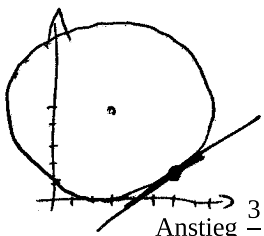
c) Was passiert in gleichem Zusammenhang im Punkt $x=8$, $y=5$?

Lösung:

a) Ist $y=y(x)$ durch $F(x,y)=0$ definiert, so gilt $F(x,y(x))=0$. Da die Ableitung einer Konstanten gleich 0 ist, erhält man $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und damit die zu zeigende Formel für die implizite Differenziation $\boxed{y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}}$.

b) $F(x,y)=45-h(x,y)=0$

$F(x,y)=45-36-6x+x^2-10y+y^2=x^2-6x+9+y^2-10y=(x-3)^2+(y-5)^2-25=0$:
Kreis mit Radius 5 um den Punkt $(3,5)$.



Anstieg $\frac{3}{4}$

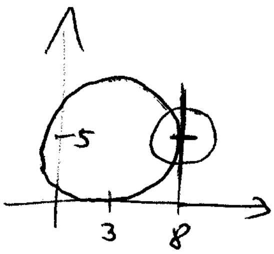
$(6,1)$ liegt auf dem Kreis: $(6-3)^2+(1-5)^2=3^2+4^2=5^2$

implizit: $y'(x)=-\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=-\dfrac{2(x-3)}{2(y-5)}=-\dfrac{6-3}{1-5}=\underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$

explizit: $(y-5)^2=25-(x-3)^2$, $y-5=\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$,
wegen $y=1$, $y-5<0$ gilt
$y-5=-\sqrt{25-(x-3)^2}$, $y=5-\sqrt{25-(x-3)^2}$.

$$y'(x)=-\frac{-2(x-3)}{2\sqrt{25-(x-3)^2}}=\frac{x-3}{\sqrt{25-(x-3)^2}}=\frac{6-3}{\sqrt{25-3^2}}=\underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

c)



Tangente senkrecht

$(8,5)$ liegt auf dem Kreis: $(8-3)^2+(5-5)^2=5^2+0^2=5^2$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=2(x-3)=10$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2(y-5)=0$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ nicht definiert (bzw. ∞)

$F(x,y)=0$ ist in Umgebung von $(8,5)$ nicht explizit auflösbar:
$y=5\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$ ist keine Funktion (nicht eindeutig)