Aufgabe 18.47

a) Zeigen Sie, dass die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\cos t\\t\sin t\\t^2\end{pmatrix}$ auf dem elliptischen Paraboloid $z=x^2+y^2$ verläuft!

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi^2}{4}\right)^{\mathsf{T}}$ Doppelpunkt auf dieser Kurve ist, d.h. sich für zwei verschiedene Werte des Parameters t ergibt!

c) Ermitteln Sie für diesen Punkt die Gleichungen der beiden Tangenten an die Kurve und mit deren Hilfe die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid!

d) Entwickeln Sie $f(x,y)=x^2+y^2$ für $(x_0,y_0)=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ in eine Taylorreihe!

e) Bestimmen Sie die Tangentialebene mit Hilfe der Taylorentwicklung!

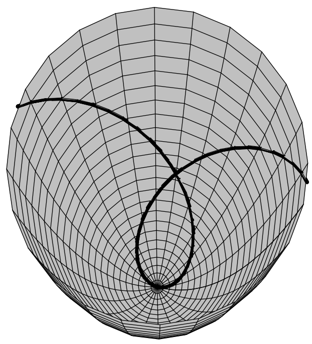
Lösung:

a) Es gilt $(x(t))^2+(y(t))^2=(t\cos t)^2+(t\sin t)^2=t^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)=t^2=z(t)$, also liegen alle Kurvenpunkte auf dem elliptischen Paraboloid $z=x^2+y^2$.

b) $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}t\cos t\\t\sin t\\t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\pi/2\\\pi^2/4\end{pmatrix},\quad t^2=\frac{\pi^2}{4},\quad t=\pm\frac{\pi}{2}$

$t=\frac{\pi}{2}$: $\vec{x}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\\pi/2\\\pi^2/4\end{pmatrix}$, $t=-\frac{\pi}{2}$: $\vec{x}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\\pi/2\\\pi^2/4\end{pmatrix}$

Den gegebenen Punkt erhält man also für die beiden Paramterwerte $t=\pi/2$ und $t=-\pi/2$ (und nur für diese Werte), er liegt genau zweimal auf der Kurve.



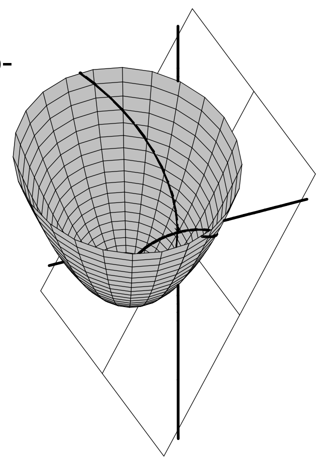
c) Tangentenrichtung: $\vec{x}\,'(t)=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\\sin t+t\cos t\\2t\end{pmatrix},\ \vec{x}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\pi/2\\1\\\pi\end{pmatrix},\ \vec{x}\,'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\pi/2\\-1\\-\pi\end{pmatrix}$

Tangentengleichungen: $\vec{X}_1(u)=\begin{pmatrix}0\\\pi/2\\\pi^2/4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-\pi/2\\1\\\pi\end{pmatrix},\quad \vec{X}_2(u)=\begin{pmatrix}0\\\pi/2\\\pi^2/4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}\pi/2\\1\\\pi\end{pmatrix}$

(Richtungsvektor der zweiten Tangente mit -1 multipliziert.)

Da beide Tangenten in der Tangentialebene liegen, ist ihr Kreuzprodukt Stellungsvekor der Tangentialebene:

$$\begin{pmatrix}-\pi/2\\1\\\pi\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\pi/2\\1\\\pi\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\pi/2&1&\pi\\\pi/2&1&\pi\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\pi^2\\-\pi\end{pmatrix}\,\widehat{=}\,\begin{pmatrix}0\\\pi\\-1\end{pmatrix}.$$



Tangentialebene:

$$\begin{pmatrix}0\\\pi\\-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\\pi/2\\\pi^2/4\end{pmatrix}\right)=0,\quad \pi y-z=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4},\quad \pi y-z=\frac{\pi^2}{4}$$

d) $f(x,y)=x^2+y^2,\ \nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, alle höheren part. Ableitungen sind 0

$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4},\ \nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0\\\pi\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}_f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

Da die partiellen Ableitungen höheren als zweiten Grades alle verschwinden, bricht die Taylorreihe nach dem quadratischen Glied ab und es gilt exakt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) + \nabla f\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(x-0 \quad y-\tfrac{\pi}{2}\right) \boldsymbol{H}_f\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + \left(x \quad y-\tfrac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \pi\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + x^2 + \left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass dieser Ausdruck tatsächlich gleich x^2+y^2 ist.

e) Die Tangentialebene an $f(x,y)$ in (x_0,y_0) erhält man durch Taylorentwicklung bis zum linearen Glied:

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Nach dem Ergebnis von d) ist die Tangentialebene also

$$z = \frac{\pi^2}{4} + \pi\left(y-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \pi y - \frac{\pi^2}{2}, \quad \pi y - z = \frac{\pi^2}{4} \text{ wie bereits aus c) bekannt.}$$